# Indice – Taux d'évolution moyen

## Ce que dit le programme :

| CONTENUS | CAPACITÉS ATTENDUES | COMMENTAIRES |
|---|---|---|
| ***Indice simple en base 100.*** | Passer de l'indice au taux d'évolution, et réciproquement. | Le calcul d'un indice synthétique, comme par exemple l'indice des prix, n'est pas au programme. |
| **Racine *n*-ième d'un nombre réel** positif. Notation $a^{1/n}$ | - Déterminer avec une calculatrice ou un tableur la solution positive de l'équation $x^n = a$ , lorsque *a* est un réel positif. | La notation $\sqrt[n]{a}$ n'est pas exigible. |
| **Taux d'évolution moyen.** | Trouver le taux moyen connaissant le taux global. | Exemple : taux mensuel équivalent à un taux annuel. |

## 1. Indice simple en base 100

### 1.1) Activité :

1°) En 2011, Vincent a acheté une calculatrice scientifique pour le prix de 59,90 euros. En 2012, la même calculatrice coûtait 62,90 euros.

a) Calculer le coefficient multiplicateur *k* et le taux d'évolution $t$ de $y_1 = 59{,}90$ à $y_2 = 62{,}90$.

b) Calculer le nouveau prix de la calculatrice, si elle avait coûté 100 euros, en 2011.

c) Avec la même évolution, calculer le prix de cette calculatrice en 2013.

2°) Tiphanie a acheté une calculatrice plus performante en 2011 pour 119,90 euros. En 2012, elle coûtait 110,31 euros.

a) Calculer le coefficient multiplicateur *k* et le taux d'évolution $t'$ de $y'_1 = 119{,}90$ à $y'_2 = 110{,}31$.

b) Calculer le nouveau prix de la calculatrice, si elle avait coûté 100 euros, en 2011.

c) Avec la même évolution, calculer le prix de cette calculatrice en 2013.

### 1.2) Rappels de 1ère STMG

- On considère deux nombres réels strictement positifs $y_1$ et $y_2$.
  $y_1$ représente la valeur d'une grandeur à une époque 1 et $y_2$ représente la valeur de la même grandeur à une époque 2. Alors le coefficient multiplicateur *k* de $y_1$ à $y_2$ est défini par : $k = \frac{y_2}{y_1}$ . Ce qui donne $y_2 = k \times y_1$ ou $y_1 = \frac{y_2}{k}$ .
  On passe de $y_1$ à $y_2$ en multipliant par *k*.

- Le taux d'évolution de $y_1$ à $y_2$ est défini par : $t = \frac{y_2 - y_1}{y_1}$ ou encore :

$$t = \frac{\text{Valeur finale} - \text{Valeur initiale}}{\text{valeur initiale}}$$

- Ce qui donne $t = k - 1$ ou encore $k = 1 + t$ .

## 1.3) Définitions

On considère deux nombres réels strictement positifs $y_1$ et $y_2$.
On note $k$ le coefficient multiplicateur et $t$ le taux d'évolution de $y_1$ à $y_2$.
On appelle ***indice simple en base 100 de $y_2$ par rapport à $y_1$***, ou simplement ***indice de $y_2$ par rapport à $y_1$*, *le nombre I*** tel que l'évolution qui fait passer de $y_1$ à $y_2$ fait passer de 100 à $I$ proportionnellement. On obtient le tableau de proportionnalité :

| | |
|---|---|
| $y_1$ | 100 |
| $y_2$ | I |

Ce qui donne : (1) $I=\frac{100\times y_2}{y_1}$ ou (2) $I=100\times\frac{y_2}{y_1}$ .

## 1.4) Relation entre l'indice et le coefficient multiplicateur

**Propriété n°1** : On considère deux nombres réels strictement positifs $y_1$ et $y_2$.
On note k le coefficient multiplicateur de $y_1$ à $y_2$ et I l'indice de $y_2$ par rapport à $y_1$, alors on a les deux relations :

(3) $I=100\times k$ ou encore : (4) $k=\frac{I}{100}$

**Exemple 1** :
Le chiffre d'affaire d'une entreprise est passé de 65 500 € en 2011 à 72 050 € en 2012.
1°) Calculer l'indice d'évolution du chiffre d'affaire.
2°) Calculer le coefficient multiplicateur de 65 500 à 72 050.
3°) En déduire le taux d'évolution du chiffre d'affaire.

1°) Par définition de l'indice de $y_2$ par rapport à $y_1$, on a :

$$I=\frac{100\times y_2}{y_1}=\frac{100\times 72050}{65500}=110 \quad \text{donc} \quad I=110 .$$

2°) Attention, la question 2° dit « Calculer le coefficient multiplicateur de 65 500 à 72 050 », je dois donc faire un *calcul direct*. Or, par définition, le coefficient multiplicateur de $y_1$ à $y_2$, on a :

$$k=\frac{y_2}{y_1}=\frac{72050}{65500}=1{,}1 \quad \text{donc} \quad k=1{,}1 .$$

Si la question était « En déduire le coefficient multiplicateur de 65 500 à 72 050 », il faut calculer k à partir de la formule de I :

$I=100\times k$ donc, $k=\frac{I}{100}=\frac{110}{100}=1{,}1$ . On obtient bien $k=1{,}1$ .

3°) Pour « déduire » la valeur du taux d'évolution du chiffre d'affaire, on applique la formule qui relie le taux d'évolution au coefficient multiplicateur de $y_1$ à $y_2$, vue en classe de 1ère STMG.

On sait que $k = 1+t$ ou encore $t = k-1$. Ce qui donne $t=k-1=1{,}1-1=0{,}1=\frac{10}{100}=+10\%$

**Conclusion** : Le chiffre d'affaire a subi une augmentation de 10%.

### 1.5) Relation entre l'indice et le taux d'évolution

**Propriété n°2** : On considère deux nombres réels strictement positifs $y_1$ et $y_2$.
On note $t$ le taux d'évolution de $y_1$ à $y_2$ et $I$ l'indice de $y_2$ par rapport à $y_1$, alors on a les deux relations :

(5) $I=100\times(1+t)$ ou encore : (6) $t=\dfrac{I-100}{100}$ .

Exercices résolus n°1 et 2 p.13 faits en classe.
A faire : Exercices n°2, 4 et 5 p. 20

**Exemple 2** :
En 2012, le chiffre d'affaire d'une entreprise a baissé de 15% par rapport à 2011.
1°) Calculer le coefficient multiplicateur du chiffre d'affaire entre 2011 et 2012.
2°) En déduire l'indice d'évolution du chiffre d'affaire pour la même période.

1°) On note $y_1$ et $y_2$ les chiffre d'affaire de l'entreprise en 2011 et 2012 respectivement.
D'après l'énoncé, le taux d'évolution du chiffre d'affaire entre $y_1$ et $y_2$ est :

$$t=-15\%=\frac{-15}{100}=-0{,}15$$

Donc, le coefficient multiplicateur est donné par : $k=1+t=1+(-0{,}15)=0{,}85$

**Conclusion** : Le coefficient multiplicateur est : $k=0{,}85$ .

2°) Nous avons deux méthodes à notre disposition pour calculer l'indice :

- soit à partir du taux d'évolution en appliquant la formule (5)
  $I=100\times(1+t)$
  $I=100\times[1+(-0{,}15)]$
  $I=100\times 0{,}85$
  $I=85$
- soit à partir du taux d'évolution en appliquant la formule (3)
  $I=100\times k$
  $I=100\times 0{,}85$
  $I=85$

**Conclusion** : L'indice d'évolution du chiffre d'affaire est : $I=85$

CQFD.

A faire : Exercices n°6, 7 et 8 p. 20

## 2. Racine n-ième d'un nombre réel positif

### 2.1) Activité sur Géogebra

1°) Recherche (du nombre de) des solutions positives des équations : (1) $x^2=5$ , (2) $x^3=5$ , (3) $x^4=5$ puis généralisation.

Exercices n°14, 15 p.21

## 2.2) Théorème et définitions

**Théorème** : Soit $a$ un nombre réel positif et $n$ un entier naturel non nul.
Alors, l'équation « $x^n = a$ » admet une unique solution dans l'intervalle $[0\,;+\infty[$ .
**Définition** : Cette solution unique se note $a^{1/n}$ et s'appelle ***la racine n-ième*** de $a$.

**Remarques** :
1°) Cette solution positive unique se note également : $\sqrt[n]{a}$ .
Par défaut : $a^{1/2} = \sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$ , c'est-à-dire que « la racine 2-ème d'un nombre réel positif $a$ est égale à la racine carrée de $a$ ».
$a^{1/3} = \sqrt[3]{a}$ , c'est-à-dire que « la racine 3-ème d'un nombre réel positif $a$ s'appelle aussi la racine cubique de $a$ ».

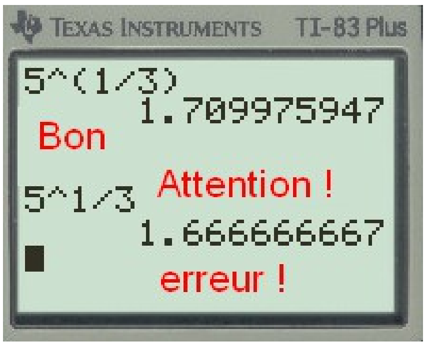
2°) La notation $\sqrt[n]{a}$ n'est pas exigible au BAC.

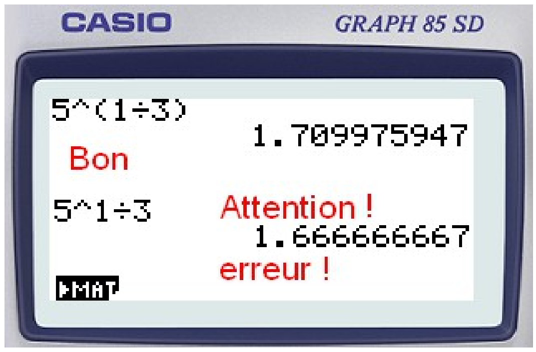
## 2.3) Exemple

Résoudre l'équation suivante $x^3 = 5$ , dans l'intervalle $[0\,;+\infty[$ .

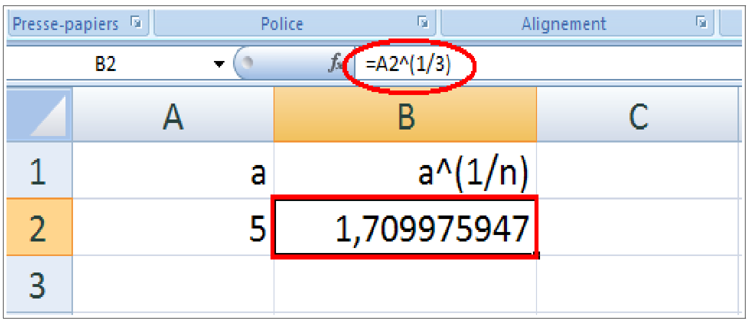
Dans l'intervalle $[0\,;+\infty[$ , cette équation admet une solution unique : $x = 5^{1/3}$
qu'on peut calculer à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur :
**Mais attention !** Ne pas oublier les parenthèses ; sinon le résultat serait faux car la puissance est prioritaire par rapport à la division (classe de 5ème).

***Utilisation de la calculatrice***




***Utilisation d'un tableur***



## 2.4) Propriétés

Pour tout nombre réel positif $a$ et tout entier naturel $n$, non nul, on a :
**(P₁)** : $x^n = a$ équivaut à $x = a^{1/n}$ .
**(P₂)** : $\left(a^{1/n}\right)^n = a$ .
**(P₂)** : $\left(a^n\right)^{1/n} = a$ .

Exemples : 1°) $2^{10} = 1024$ donc $1024^{1/10} = 2$
2°) $243^{1/5} = 3$ donc $3^5 = 243$

# 3. Taux d'évolution global

## 3.1) Activité

### Étude d'un exemple

Le prix d'une calculatrice scientifique a augmenté de 10% de 2010 à 2011, diminué de 5% de 2011 à 2012 et diminué de 10% de 2012 à 2013.

1°) Calculer le taux d'évolution global T de 2010 à 2013.

2°) Sachant que la calculatrice coûtait 49,90 € en 2010, calculer son nouveau prix en 2013.

1°) On calcule d'abord le coefficient multiplicateur pour chaque période :

$t_1 = +10\% = \dfrac{10}{100} = 0{,}1$. Donc $k_1 = 1+t_1 = 1{,}1$. De même : $k_2 = 1+t_2 = 0{,}95$ et $k_3 = 1+t_3 = 0{,}90$.

Le coefficient multiplicateur global (pour la période de 3 ans) est

$$K = k_1 \times k_2 \times k_3 = 1{,}1 \times 0{,}95 \times 0{,}90 = 0{,}9405 \, .$$

Or, $K = 1+T$. Donc, $T = K - 1 = 0{,}9405 - 1 = -0{,}0595 = \dfrac{-5{,}95}{100}$ . Donc $T = -5{,}95\ \%$.

**Conclusion 1.** Le taux d'évolution global de 2010 à 2013 est de $-5{,}95\%$.

2°) Calcul du prix en 2013 :

$P_{2013} = P_{2010} \times K = 49{,}90 \times 0{,}9405 = 46{,}93$.

**Conclusion 2.** Le nouveau prix de la calculatrice en 2013 est de 46,93 €.

## 3.2) Théorème et Définitions

Soit $n$ un nombre entier naturel, non nul.
Soit $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n$, des nombres réels strictement positifs et $t_1, t_2, \ldots, t_n$ les $n$ *évolutions successives* pour passer de $y_0$ à $y_1$, de $y_1$ à $y_2$, ... et de $y_{n-1}$ à $y_n$ , respectivement. Alors

1°) Le ***coefficient multiplicateur global*** de $y_0$ à $y_n$, est donné par :

$$K = 1+T = (1+t_1)(1+t_2)\ldots(1+t_n)$$

2°) Le ***taux d'évolution global*** de $y_0$ à $y_n$, est donné par :

$$T = K - 1 = (1+t_1)(1+t_2)\ldots(1+t_n) - 1.$$

# 4. Taux d'évolution moyen

## 4.1) Activité

### Étude d'un exemple

Vincent a déposé un capital à la Caisse d'Epargne à 3,5% d'intérêts par an.
1°) Les intérêts étant calculés par mois, calculer le ***taux d'évolution mensuel moyen $t_M$*** équivalent.
2°) Si les intérêts sont calculés par quinzaine, calculer le ***taux d'évolution moyen par quinzaine $t_Q$*** équivalent.

1°) Le taux d'évolution global est : $T = +3{,}5\% = +0{,}035$. Un an = 12 mois.
On cherche un taux d'évolution mensuel $t_M$ (le même chaque mois) pour obtenir le même taux d'évolution global. Donc, on aura : $(1+t_M)^{12} = 1+T$.
Ce qui donne : $(1+t_M)^{12} = 1{,}035$. Donc $1+t_M = 1{,}035^{1/12}$.
Par conséquent : $t_M = 1{,}035^{1/12} - 1$. A la calculatrice, on obtient : $t_M = +\ 0{,}002870899... = 0{,}287\%$.
**Conclusion 1**. Le taux d'évolution mensuel moyen $t_M$ équivalent est égal à + 0,287% par mois.

2°) Le taux d'évolution global est : $T = +3{,}5\% = +0{,}035$. Un an = 24 quinzaines.
On cherche un taux d'évolution par quinzaine $t_Q$ (calculé le 1er et le 16 de chaque mois) pour obtenir le même taux d'évolution global. Donc, on aura : $(1+t_Q)^{24} = 1+T$.
Ce qui donne : $(1+t_Q)^{24} = 1{,}035$. Donc $1+t_M = 1{,}035^{1/24}$.
Par conséquent : $t_Q = 1{,}035^{1/24} - 1$. A la calculatrice, on obtient : $t_Q = +\ 0{,}001434421... = 0{,}143\%$.
**Conclusion 2**. Le taux d'évolution moyen par quinzaine $t_Q$ équivalent est égal à + 0,287% par quinzaine.

## 4.2) Théorème et Définitions

Soit $n$ un nombre entier naturel, non nul.
Soit $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n$, des nombres réels strictement positifs et $t_1, t_2, \ldots, t_n$ les $n$ *évolutions successives* pour passer de $y_0$ à $y_1$, de $y_1$ à $y_2$, ... et de $y_{n-1}$ à $y_n$, respectivement, et de taux d'évolution global $T$ et de coefficient multiplicateur global $K$.
Alors, le ***taux d'évolution moyen $t_M$*** des $n$ périodes de $y_0$ à $y_n$, est donné par :

$$(1+t_M)^n = 1+T \quad \text{ou} \quad (1+t_M)^n = K.$$

ou encore :

$$t_M = (1+T)^{1/n} - 1 \quad \text{ou} \quad t_M = K^{1/n} - 1.$$

**Exemple** : Le chiffre d'affaire d'une entreprise a augmenté de 15% en 5 ans.
Calculer le taux d'évolution annuel moyen du C.A. de cette entreprise.

Le taux d'évolution global est : $T = +15\% = +0{,}15$.
On appelle $t_M$ le taux d'évolution annuel moyen du CA de cette entreprise.

D'après le cours, nous savons que :
$(1+t_M)^5 = 1+T$.
Donc : $(1+t_M)^5 = 1{,}15$.
Donc : $1+t_M = 1{,}15^{1/5}$
Donc : $t_M = 1{,}15^{1/5} - 1$
A la calculatrice, on obtient : $t_M = 0{,}028346722... = +2{,}83\%$.
**Conclusion** : Le taux d'évolution annuel moyen du CA de cette entreprise est de +2,83%.

**Autrement dit** : *Le chiffre d'affaire de cette entreprise a augmenté de 2,83% par an en 5 ans.*