Probabilités continues et lois à densité

Ce que dit le programme :

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
1ère partie ✓ ***Notion de loi à densité*** **à partir d'exemples** Loi à densité sur un intervalle.		Les exemples étudiés s'appuient sur une expérience aléatoire et un univers associé Ω, muni d'une probabilité. On définit alors une variable aléatoire X, fonction de Ω dans **R**, qui associe à chaque issue un nombre réel d'un intervalle I de **R**. On admet que X satisfait aux conditions qui permettent de définir la probabilité de l'événement $\{X \in J\}$ comme aire du domaine : $\{M(x, y) ; x \in J \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}$ où f désigne la fonction de densité de la loi et J un intervalle inclus dans I. Toute théorie générale des lois à densité et des intégrales sur un intervalle non borné est exclue.
1ère partie ✓ **Loi uniforme sur [*a*, *b*].** Espérance d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme.	Connaître la fonction de densité de la loi uniforme sur $[a, b]$.	L'instruction « nombre aléatoire » d'un logiciel ou d'une calculatrice permet d'introduire la loi uniforme sur [0,1]. La notion d'espérance d'une variable aléatoire à densité sur $[a;b]$ est introduite à cette occasion par : $\int_a^b t\,f(t)\,dt$. On note que cette définition constitue un prolongement dans le cadre continu de l'espérance d'une variable aléatoire discrète. (*AP*) *Méthode de Monte-Carlo.*
1ère partie ✓ **Lois exponentielles.** **Espérance d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle.**	• Calculer une probabilité dans le cadre d'une loi exponentielle. ☐ Démontrer que l'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ est $\frac{1}{\lambda}$.	On démontre qu'une variable aléatoire T suivant une loi exponentielle vérifie la propriété de durée de vie sans vieillissement : pour tous réels t et h positifs, $P_{(T\geqslant t)}(T\geqslant t+h)=P(T\geqslant h)$ L'espérance est définie comme la limite quand x tend vers $+\infty$ de $\int_0^x t\,f(t)\,dt$ où f est la fonction de densité de la loi exponentielle considérée. Cette partie du programme se prête particulièrement à l'étude de situations concrètes, par exemple sur la radioactivité ou la durée de fonctionnement d'un système non soumis à un phénomène d'usure.
Loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. **Théorème de Moivre Laplace (admis).**	• Connaître la fonction de densité de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ et sa représentation graphique. ☐ Démontrer que pour $\alpha \in]0,1[$, il existe un unique réel positif u_α tel que : $P(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha)=1-\alpha$ lorsque X suit la loi normale $N(0,1)$. • Connaître les valeurs approchées : $u_{0,05}\approx 1{,}96$ et $u_{0,01}\approx 2{,}58$.	Pour introduire la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, on s'appuie sur l'observation des représentations graphiques de la loi de la variable aléatoire $Z_n=\frac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}$; où X_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ et cela pour de grandes valeurs de n et une valeur de p fixée entre 0 et 1. Le théorème de Moivre Laplace assure que pour tous réels a et b, $P(Z_n \in [a,b])$ tend vers $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$ lorsque n tend vers $+\infty$. L'espérance d'une variable aléatoire suivant la loi $N(0,1)$ est définie par $\lim_{x\to-\infty}\int_x^0 tf(t)\,dt+\lim_{y\to+\infty}\int_0^y tf(t)\,dt$ où f désigne la densité de cette loi. On peut établir qu'elle vaut 0. On admet que la variance, définie par $E\left((X-E(X))^2\right)$, vaut 1.
Loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ d'espérance μ et d'écart-type σ.	Utiliser une calculatrice ou un tableur pour obtenir une probabilité dans le cadre d'une loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$. Connaître une valeur approchée de la probabilité des événements suivants : $\{X\in[\mu-\sigma, \mu+\sigma]\}$, $\{X\in[\mu-2\sigma, \mu+2\sigma]\}$ et $\{X\in[\mu-3\sigma, \mu+3\sigma]\}$, lorsque X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$.	Une variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ si $\frac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On fait percevoir l'information apportée par la valeur de l'écart-type. [*SI* et *SPC*] Mesures physiques sur un système réel en essai. La connaissance d'une expression algébrique de la fonction de densité de la loi $N(\mu,\sigma^2)$ n'est pas un attendu du programme. On illustre ces nouvelles notions par des exemples issus des autres disciplines.

I. Variable aléatoire continue

1.1) Définition et exemples

Dans toute la suite, on considère une expérience aléatoire et Ω l'univers associé (non nécessairement fini), muni d'une probabilité.

Définition 1.

On appelle ***variable aléatoire continue***, toute fonction X de Ω dans $\mathbb{R}$, qui peut prendre comme valeurs *tous les nombres réels* d'un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Exemples :

1°) La variable aléatoire X égale à la durée de vie (âge au décès) d'une personne dans une ville donnée ou dans un pays donné, est une v.a. continue.

2°) Le poids à la naissance d'un bébé, exprimé en kg, , est une v.a. continue.

3°) La variable aléatoire X égale à la durée de fonctionnement d'une ampoule électrique exprimée en heures, est une v.a. continue.

4°) La variable aléatoire X égale à la durée de communication téléphonique, exprimée en heures, d'un jeune de 16 à 25 ans, est une v.a. continue.

5°) L'instruction ALEA() sur un tableur ou RAND# ou nbrAleat() sur une calculatrice, donnent un nombre au hasard compris entre 0 et 1. Ces instructions définissent une v.a. continue X prenant ses valeurs dans [0;1]. Toutes ces valeurs "peuvent" être prises.

1.2) Fonction de densité de probabilité sur un intervalle

Définition 2.

On appelle ***fonction de densité de probabilité*** ou ***densité de probabilité*** sur un intervalle I, toute fonction f continue, positive sur I et dont l'aire totale du domaine délimité par la courbe C_f et l'axe des abscisses est égale à 1.

Autrement dit : f est une ***densité de probabilité*** sur l'intervalle [a; b] lorsque :

1°) f est continue sur I (sauf éventuellement en un nombre fini de points de I);
2°) f est positive sur I ; c'est-à-dire pour tout $x \in I : f(x) \geqslant 0$;
3°) et $\int_I f(x)\,dx = 1$.

Calcul de l'intégrale sur I : La condition 3 se traduit dans différentes situations par :

– si $I = [a; b]$: $\int_I f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = 1$

– si $I = [a\,;+\infty[$: l'intégrale se calcule en deux temps : pour tout $x \geqslant a$; on calcule d'abord $\int_a^x f(t)\,dt$; puis on fait tendre x vers $+\infty$:

$$\int_I f(x)\,dx = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,dt = 1$$

– si $I = \mathbb{R} =]-\infty\,;+\infty[$, on découpe I en deux intervalles $]-\infty\,;0]$ et $[0\,;+\infty[$ et on fait la somme des aires sur ces deux intervalles en procédant comme ci-dessus : $\int_I f(x)\,dx = \lim_{x\to-\infty} \int_x^0 f(t)\,dt + \lim_{y\to+\infty} \int_0^y f(t)\,dt = 1$.

Exemples :

1°) Soit f la fonction définie sur [0;1] par $f(x)=2x$. Montrer que f définit bien une fonction de densité de probabilité sur [0;1].

*2°) Soit g la fonction définie sur [0;2] par $g(x)=kx^2$. Déterminer **k** pour que f définisse une fonction de densité de probabilité sur [0;2].*

3°) Soit h la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $h(x)=k\,e^{-2x}$. Déterminer k pour que f définisse une fonction de densité de probabilité sur $[0;+\infty[$.

1°) La fonction f est bien continue sur [0;1] comme fonction polynôme. *f* est positive sur [0;1] car pour tout $x\in[0;1]$: $x\geqslant 0$. De plus, une primitive de *f* sur [0;1] est la fonction *F* définie par : $F(x)=x^2$. Donc : $\int_0^1 f(x)\,dx=[F(x)]_0^1=F(1)-F(0)=1^2-0^2=1$. CQFD.

2°) La fonction *g* est bien continue sur [0;2] comme fonction polynôme. *g* est positive sur [0;2] si et seulement si $k>0$. De plus, une primitive de *g* sur [0;2] est la fonction *G* définie par : $F(x)=k\frac{x^3}{3}$. Donc : $\int_0^2 g(x)\,dx=[G(x)]_0^2=G(2)-G(0)=k\frac{2^3}{3}-k\times 0=\frac{8}{3}k$.

Par conséquent : $\int_0^2 g(x)\,dx=1$ (ssi) $\frac{8}{3}k=1$ (ssi) $k=\frac{3}{8}$. Donc $g(x)=\frac{3}{8}x^2$ CQFD.

3°) La fonction *h* est bien continue sur $[0;+\infty[$ comme produit de fonctions continues. La fonction *h* est positive sur $[0;+\infty[$ si et seulement si $k>0$, car pour tout $x\in\mathbb{R}\, e-2x>0$.

De plus, une primitive de *h* sur $[0;+\infty[$ est la fonction *H* définie par : $H(x)=\frac{-k}{2}e^{-2x}$.

Donc, pour tout $x\in\mathbb{R}$: $\int_0^x H(t)\,dt=[H(t)]_0^x=H(x)-H(0)=\frac{-k}{2}e^{-2x}-\left(\frac{-k}{2}e^0\right)=\frac{k}{2}\left(1-e^{-2x}\right)$.

Maintenant, on fait tendre *x* vers l'infini. On a : $\lim_{x\to+\infty} e^{-2x}=0$. Donc $\lim_{x\to+\infty}(1-e^{-2x})=1$.

Donc $\lim_{x\to+\infty}\int_0^k h(t)\,dt=\frac{k}{2}$.

Par conséquent : $\frac{k}{2}=1$ (ssi) $k=2$. Donc $h(x)=2e^{-2x}$ CQFD.

1.3) Loi de probabilité à densité sur un intervalle

On considère une expérience aléatoire et Ω l'univers associé, muni d'une probabilité.

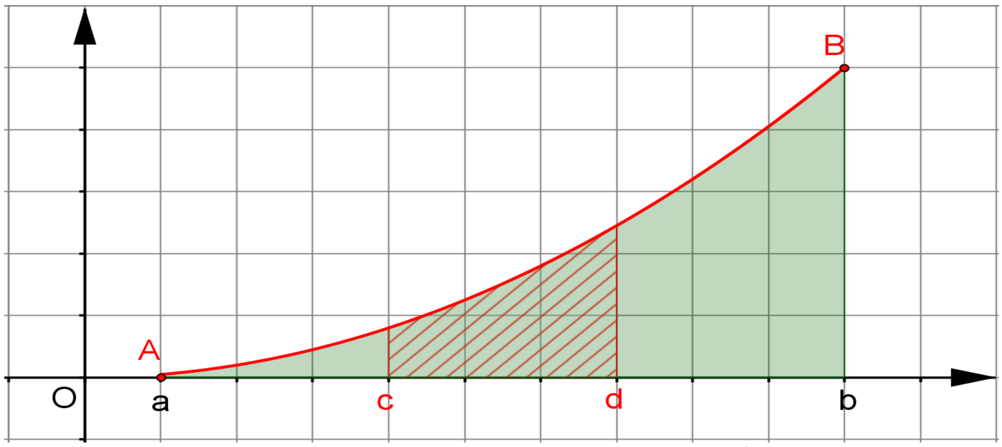
Définition 3.

Soit *X* une variable aléatoire continue à valeurs dans un intervalle *I* muni d'une fonction de densité *f*.
On définit la ***loi de probabilité de densité f de X***, en associant à tout intervalle *J* inclus dans *I*, la probabilité de l'événement " $X\in J$ ", égale à ***l'aire du domaine*** $\mathscr{D}$ = {*M*(*x*;*y*) tels que : $x\in J$ et $0\leq y\leq f(x)$}, c'es-à-dire ***l'aire du domaine délimité par la courbe de f et l'axe des abscisses, lorsque x parcourt J.*** Donc, si $J=[c;d]$:

$$P(X\in[c;d])=\int_c^d f(x)\,dx.$$

ou encore :

$$P(c\leqslant X\leqslant d)=\int_c^d f(x)\,dx.$$



$$P(a \leqslant X \leqslant b) = 1 \quad \textbf{et} \quad P(c \leqslant X \leqslant d) = \int_c^d f(x)\,dx$$

Propriétés immédiates.

Soit X une variable aléatoire continue à valeurs dans un intervalle I muni d'une fonction de densité f. Alors

(P_1) ***Probabilité d'un point*** : Pour tout réel $c \in [a\,;b]$: $P(X=c)=0.$

(P_2) ***Les bornes n'ont pas d'importance***. Pour tous nombres réels $c, d \in I$:

$$P(c \leqslant X \leqslant d) = P(c \leqslant X < d) = P(c < X \leqslant d) = P(c < X < d)$$

(P_3) : ***Événement contraire***. Pour tout nombre réel $c \in I$:

$$P(X > c) = 1 - P(X \leqslant c)$$

Démonstration.

(P_1) Pour tout réel $c \in [a\,;b]$: $P(X=c) = P(X \in \{c\}) = P(c \leqslant X \leqslant c) = \int_c^c f(x)\,dx = 0.$

(P_2) $[c\,;d] = [c\,;d[\, \cup \{d\}$. Ces deux événements étant incompatibles, on a :

$$P(X \in [c;d\,]) = P(X \in [c;d\,[) + P(X \in \{d\,\}) = P(X \in [c;d\,[) + 0 = P(X \in [c;d\,[).$$

(P_3) L'événement $(X > c)$ est l'événement contraire de $(X \leqslant c)$.

Donc, par définition des probabilités de deux événements contraires, nous avons :

$$P(X > c) = 1 - P(X \leqslant c) \qquad \text{CQFD.}$$

Remarques :

Les propriétés des probabilités dans le cas discret, s'étendent naturellement au cas continu. Soient A et B deux événements. Alors :

1°) $P(\varnothing) = 0$; et en plus, dans le cas continu, $P(\{c\}) = P(X = c) = 0$.

2°) $P(\Omega) = 1$; ici $P(X \in I) = 1$.

3°) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

4°) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$; si A et B sont incompatibles.

5°) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$; où $\overline{A}$ désigne l'événement contraire de A.

6°) Si $P(B) \neq 0$, alors la probabilité conditionnelle de "*A sachant que B est réalisé*" est donnée par la formule : $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Exemples :

Soit X la variable aléatoire continue à valeurs dans l'intervalle [0; 1], *muni de la fonction densité f définie par :* $f(x)=3x^2$.

a) *Déterminer P(X = 0,5)*
b) *Calculer* $P(X\leqslant 0{,}5)$.
c) *En déduire* $P(X>0{,}5)$.
d) *Calculer* $P(0{,}3<X\leqslant 0{,}5)$.
e) *Calculer* $P_{(0{,}2\leqslant X<0{,}5)}(0{,}3\leqslant X<0{,}9)$.

Corrigé

Tout d'abord, pour les différents calculs, je détermine une primitive F de la fonction f.

$f(x)=3x^2$, donc la fonction F définie par $F(x)=x^3$ est une primitive de f sur [0,1].

[Je n'ai pas besoin de la constante pour le calcul de ces intégrales, puisqu'elle disparaît en faisant la soustraction $F(b)-F(a)$].

a) $P(X=0{,}5)=$ $P(0{,}5\leqslant X\leqslant 0{,}5)=\int_{0,5}^{0,5} f(x)dx=0.$

b)
$$P(X\leqslant 0{,}5)=P(0\leqslant X\leqslant 0{,}5)=\int_0^{0,5} f(x)dx=\int_0^{0,5} 3x^2dx=F(0{,}5)-F(0)=(0{,}5)^3-0^3=0{,}125$$

c) L'événement "$X>0{,}5$" est l'événement contraire de " $X\leqslant 0{,}5$ ".
Donc $P(X>0{,}5)=$ $1-P(X\leqslant 0{,}5)$ $=1-0{,}125=$ 0,875.

d) $P(0{,}3\leqslant X\leqslant 0{,}5)=\int_{0,3}^{0,5} f(x)dx=\int_{0,3}^{0,5} 3x^2dx$
$$P(0{,}3\leqslant X\leqslant 0{,}5)=F(0{,}5)-F(0{,}3)=(0{,}5)^3-(0{,}3)^3=0{,}125-0{,}027=0{,}098$$

e) Par définition d'une probabilité conditionnelle :
$$P_{(0{,}2\leqslant X<0{,}5)}(0{,}3\leqslant X<0{,}9)=P_{X\in[0{,}2;0{,}5]}(X\in[0{,}3;0{,}9])=\frac{P(X\in[0{,}2;0{,}5]\cap[0{,}3;0{,}9])}{P(X\in[0{,}2;0{,}5])}$$

Donc $$P_{(0{,}2\leqslant X<0{,}5)}(0{,}3\leqslant X<0{,}9)=\frac{P(X\in[0{,}3;0{,}5])}{P(X\in[0{,}2;0{,}5])}=\frac{\int_{0,3}^{0,5} f(x)dx}{\int_{0,2}^{0,5} f(x)dx}$$
$$=\frac{F(0{,}5)-F(0{,}3)}{F(0{,}5)-F(0{,}2)}=\frac{(0{,}5)^3-(0{,}3)^3}{(0{,}5)^3-(0{,}2)^3}=\frac{0{,}098}{0{,}117}\simeq 0{,}838$$ CQFD.

1.

1.4) Espérance d'une v.a. à densité

On considère une expérience aléatoire et Ω l'univers associé, muni d'une probabilité.

Définition 3.

Soit X une variable aléatoire continue de densité de probabilité f sur l'intervalle I.
Alors, l'***espérance*** de X sur I est définie par :
$$E(X)=\int_I t\,f(t)dt$$

Remarques : i) Le calcul de l'intégrale se fait comme dans le cas d'une fonction de densité comme suit :

- Si $I=[a;b]$: $E(X)=\int_a^b t\,f(t)dt$;
- Si $I=[a;+\infty[$: $E(X)=\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x t\,f(t)dt$.

ii) Cette formule constitue un prolongement dans le cadre continu de l'espérance d'une v.a. discrète. En effet, lorsque $I = [a;b]$, $E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i \rightarrow \int_I t f(t) dt$; le symbole $\sum$ est remplacé par le symbole $\int$, x_i par t et la probabilité p_i par $f(t)dt$.

Exemple : On reprend l'exemple précédent avec $f(x)=3x^2$ sur l'intervalle [0; 1].
Par définition, l'espérance de X sur l'intervalle [0; 1], est donnée par :

$$E(X)=\int_0^1 t f(t) dt=\int_0^1 t\times 3t^2 dt=\int_0^1 3t^3 dt=\left[3\frac{t^4}{4}\right]_0^1=\frac{3}{4}-0=\frac{3}{4} .$$

II. Loi uniforme

2.1) Activité

A l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice, choisir un nombre au hasard.

L'instruction ALEA() sur un tableur ou RAND# ou nbrAleat() sur une calculatrice, donnent un nombre au hasard compris entre 0 et 1, exclus.

a) Y a-t-il un nombre qui a plus de chance d'apparaître que les autres nombres ?
b) Calculer la probabilité de l'événement « le nombre choisi appartient à l'intervalle I = [0,15 ; 0,17[et possède exactement trois décimales ».
c) Même question avec « le nombre choisi appartient à l'intervalle J=[0,2 ;0,5[et possède exactement trois décimales ».
d) Calculer l'amplitude de chacun des intervalles I et J précédents.
Faites une *conjecture* pour calculer la probabilité de de l'événement « le nombre choisi appartient à l'intervalle K = [c; d[contenu dans [0;1[».

a) Naturellement, il n'existe pas de nombre « privilégié ». Tous les nombres compris entre 0 et 1 ont la même chance d'apparaître que les autres nombres. On pourrait assimiler ce choix aléatoire à une « *situation d'équiprobabilité* » !
b) On pose : Ω_1 = l'ensemble des nombres de [0 ; 1[qui possèdent exactement trois décimales. Ω_1 contient exactement 1000 nombres qui possèdent exactement trois décimales, de 0 = 0,000 à 0,999.
Soit A l'événement « le nombre choisi appartient à l'intervalle I = [0,15 ; 0,17[et possède exactement trois décimales ». A contient 20 nombres qui possèdent exactement trois décimales, de 0 = 0,150 à 0,169 inclus dans l'intervalle [0,15 ; 0,17[.
Par conséquent, comme nous sommes dans une situation d'équiprobabilité, on a :

$$P(A)=\frac{Nombre\ d'issues\ favorables}{Nombre\ d'issues\ possibles}=\frac{card(A)}{card\ \Omega_1}=\frac{20}{1000}=0{,}02$$

c) Soit B l'événement « le nombre choisi appartient à l'intervalle J = [0,2 ; 0,5[et possède exactement trois décimales ». B contient 20 nombres qui possèdent exactement trois décimales, de 0 = 0,200 à 0,499 inclus dans l'intervalle [0,2 ; 0,5[.
Par conséquent, comme nous sommes dans une situation d'équiprobabilité, on a :

$$P(B)=\frac{Nombre\ d'issues\ favorables}{Nombre\ d'issues\ possibles}=\frac{card(B)}{card\ \Omega_1}=\frac{300}{1000}=0{,}3$$

c) La longueur d'un intervalle [a;b] ou [a;b[ou]a;b[est égale à ($b-a$). Par conséquent
longueur(I) = longueur([0,15 ; 0,17[) = 0,02.
et longueur(J) = longueur([0,2 ; 0,5[) = 0,3.
Conjecture « Il semble que la probabilité que "le nombre choisi appartienne à un intervalle K =[$c;d$ [contenu dans [0;1[" soit égale à la longuer de cet intervalle ». Soit :

$$P(X\in[c;d[)=d-c \quad \text{ou encore} \quad P(X\in[c;d[)=\frac{d-c}{1-0} .$$

2.2) Définition d'une loi uniforme

Définition :

Soient a et b deux nombres réels distincts. Soit X une variable aléatoire continue sur l'intervalle $[a;b]$. On dit que la v.a. X suit une ***loi uniforme*** lorsque sa densité de probabilité est une ***fonction constante*** sur $[a; b]$.
On dit aussi que la v.a. X est ***uniformément répartie*** sur l'intervalle $[a;b]$.

Remarque : une ***loi uniforme*** correspond à une situation d'***équiprobabilité*** dans le cas discret.

Propriété n°1.

La fonction de densité de probabilité de la loi uniforme sur l'intervalle $[a; b]$ est définie sur $[a; b]$ par $f(x)=\frac{1}{b-a}$.

Démonstration :
f est une *fonction constante* sur $[a; b]$ donc pour tout $x\in[a;b]$: $f(x)=k$, où k est une constante réelle positive. De plus, une primitive de f sur $[a;b]$ est la fonction F définie par : $F(x)=kx$. On alors, puisque $b-a\neq 0$:

$$\int_a^b f(x)dx=1 \quad \text{(ssi)} \quad F(b)-F(a)=1 \quad \text{(ssi)} \quad kb-ka=1 \quad \text{(ssi)} \quad k=\frac{1}{b-a} .$$

Conclusion : pour tout $x\in[a;b]$: $f(x)=\frac{1}{b-a}$. CQFD.

Propriété n°2.

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $I = [a; b]$. Alors, pour tout intervalle $J = [c;d]$ contenu dans $I = [a;b]$, on a :

$$\boxed{P(X\in J)=P(c\leqslant X\leqslant d)=\frac{d-c}{b-a}=\frac{longueur\ de\ J}{longueur\ de\ I}}$$

Démonstration :
La fonction de densité de probabilité de la loi uniforme sur l'intervalle $[a; b]$ est définie sur $[a; b]$ par : $f(x)=\frac{1}{b-a}$. Donc :

$$P(c\leqslant X\leqslant d)=\int_c^d \frac{1}{b-a}dx=\left[\frac{1}{b-a}x\right]_c^d=\frac{1}{b-a}d-\frac{1}{b-a}c=\frac{d-c}{b-a}$$ CQFD.

2.3) Espérance d'une loi uniforme

Propriété n°3.

Soient a et b deux nombres réels distincts. Soit X une variable aléatoire qui suit la ***loi uniforme*** sur l'intervalle $[a; b]$. Alors, l'espérance de X est donnée par :

$$E(X)=\frac{a+b}{2}$$

Démonstration :
La fonction de densité de probabilité de la loi uniforme sur l'intervalle $[a; b]$ est définie sur $[a; b]$ par : $f(x)=\frac{1}{b-a}$. Donc (en se rappelant de l'I.R.n°3) :

$$E(X)=\int_a^b x\times\frac{1}{b-a}dx=\left[\frac{1}{b-a}\times\frac{x^2}{2}\right]_a^b=\frac{b^2}{2(b-a)}-\frac{a^2}{2(b-a)}=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{b+a}{2}$$ CQFD.

Exemple-type :
Olivier vient tous les matins entre 7h et 7h 45 chez Karine prendre un café.

1°) *Sachant qu'Olivier ne vient jamais en dehors de la plage horaire indiquée et qu'il peut arriver à tout instant avec les mêmes chances, quelle densité peut-on attribuer à la variable aléatoire « heure d'arrivée d'Olivier » ?*

2°) *Calculer la probabilité qu'Olivier sonne chez Karine :*
a) Après 7h30 b) Avant 7h10 c) Entre 7h20 et 7h22 d) A 7h30 exactement.

3°) *Calculer l'heure moyenne d'arrivée d'Olivier ?*

Corrigé

1°) On appelle X la variable aléatoire « heure d'arrivée d'Olivier ». Aucun instant n'est plus privilégié que les autres, X est donc une v.a. *uniformément répartie* sur l'intervalle [7 ; 7,75] ou $[7\ ;\ 7+\frac{3}{4}]$. On dit aussi que X suit la *loi uniforme* sur cet intervalle.

Remarque : Dans cet exercice, l'unité utilisée est « l'heure ». Les questions sont exprimées en minutes. On pourrait « tout transformer en minutes » et définir une nouvelle variable aléatoire Y, pour simplifier les calculs :
Soit Y la variable aléatoire « le temps d'arrivée d'Olivier, exprimé en minutes, après 7 heures ».
Y est une v.a. uniformément répartie sur l'intervalle [0 ; 45].

Sinon, écrire $1\,minute=\frac{1}{60}\,heure$ *et "traduire" toutes les questions en fractions d'heures !!*

2° a) *La probabilité qu'Olivier sonne chez Karine après 7h30 est donnée par :*

– Calculs avec les heures : $P(Après\ 7\text{h}30)=P(7{,}5\leqslant X\leqslant 7{,}75)=\frac{7{,}75-7{,}5}{7{,}75-7}=\frac{0{,}25}{0{,}75}=\frac{1}{3}$
– Calculs avec les minutes : $P(Après\ 7\text{h}30)=P(30\leqslant Y\leqslant 45)=\frac{45-30}{45-0}=\frac{1}{3}$

2° b) *La probabilité qu'Olivier sonne chez Karine avant 7h10 est donnée par :*

– Calculs avec les heures : $P(Avant\ 7\text{h}10)=P(7\leqslant X\leqslant 7+\frac{10}{60})=\frac{7+\frac{1}{6}-7}{7+\frac{3}{4}-7}=\frac{1}{6}\times\frac{4}{3}=\frac{2}{9}$
– Calculs avec les minutes : $P(Avant\ 7\text{h}10)=P(0\leqslant Y\leqslant 10)=\frac{10-0}{45-0}=\frac{2}{9}$

2° c) *La probabilité qu'Olivier sonne chez Karine entre 7h20 et 7h22 est donnée par :*

– Calculs avec les heures :

$$P(Entre\ 7\text{h}20\ et\ 7\text{h}22)=P(7+\frac{20}{60}\leqslant X\leqslant 7+\frac{22}{60})=\frac{7+\frac{22}{60}-7-\frac{20}{60}}{7+\frac{3}{4}-7}=\frac{2}{60}\times\frac{4}{3}=\frac{2}{45}$$

– *Calculs avec les minutes :* $P(\text{Entre } 7\text{h}20 \text{ et } 7\text{h}22)=P(20\leqslant Y\leqslant 22)=\frac{22-20}{45-0}=\frac{2}{45}$

2° d) *La probabilité qu'Olivier sonne chez Karine à 7h30 exactement est donnée par :*

– Calculs avec les heures : $P(A\,7\text{h}30\, exactement)=P(7{,}5\leqslant X\leqslant 7{,}5)=\frac{7{,}5-7{,}5}{7{,}75-7}=0$

– *Calculs avec les minutes :* $P(A\,7\text{h}30\, exactement)=P(30\leqslant Y\leqslant 30)=\frac{30-30}{45-0}=0$.

3°) *Calcul du* ***temps moyen*** *"espéré" :* $E(X)=\frac{0+45}{2}=22{,}5\, minutes$.

Par conséquent, l'heure moyenne d'arrivée d'Olivier est ***7h 22min 30s****.*

III. Loi exponentielle

3.1) Définition et premières propriétés

Définition

Soit λ un nombre réel strictement positif.
On dit qu'une variable aléatoire X *suit la* ***loi exponentielle*** *de paramètre* λ si et seulement si X a pour fonction de densité de probabilité la fonction f définie par :
$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$. pour tout $x\in[0\,;+\infty[$.

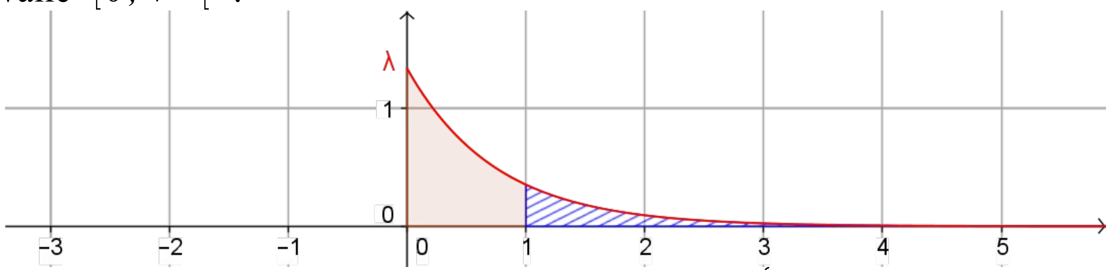
En effet,

i) La fonction f est bien définie et continue sur $[0\,;+\infty[$ comme produit de fonctions continues.

ii) La fonction f est positive sur $[0\,;+\infty[$ car $\lambda>0$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$: $e^{-\lambda x}>0$.

iii) De plus, une primitive de f sur $[0\,;+\infty[$ est la fonction F définie par : $F(x)=-e^{-\lambda x}$. Donc, pour tout $x\in\mathbb{R}$:
$\int_0^x f(t)\,dt=[F(t)]_0^x=F(x)-F(0)=-e^{-\lambda x}-(-e^0)=1-e^{-\lambda x}$.
Maintenant, on fait tendre x vers l'infini. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\lambda x}=\lim\limits_{u\to-\infty} e^u=0$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-e^{-\lambda x})=1$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^k f(t)\,dt=1$.

Conclusion : La fonction f définit bien une fonction de densité de probabilité sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.



Remarque : On aurait pu définir f sur $\mathbb{R}$ en posant : $\begin{cases} f(x)=0 & si\ x<0 \\ f(x)=\lambda e^{-\lambda x} & si\ x\geqslant 0 \end{cases}$

Dans ce cas, la fonction de densité de probabilité est continue partout sur $\mathbb{R}$ sauf au point d'abscisse $x = 0$ (il y aurait donc un point de discontinuité). Ce qui aurait alourdi les écritures et n'aurait rien modifié !

Propriétés de la loi exeponentielle

Soit λ un nombre réel strictement positif.
Soit X une variable aléatoire qui *suit la loi exponentielle de paramètre* λ. Alors, pour tout $a, b \in [0;+\infty[$, $a < b$, on a :

(P$_1$) : $P(X \leqslant a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda a}$

(P$_2$) : $P(X \geqslant a) = e^{-\lambda a}$

(P$_3$) : $P(a \leqslant X \leqslant b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$.

Démonstration.

Par définition, la fonction de densité de probabilité associée à cette v.a. est la fonction f définie par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.

Pour **(P$_1$)** : Soit $a \in [0;+\infty[$. On a $P(X \leqslant a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda t} dt$.

Or, une primitive de f sur $[0;+\infty[$ est la fonction F définie par $F(x) = -e^{-\lambda x}$.

Donc : $P(X \leqslant a) = [F(t)]_0^a = F(a) - F(0) = -e^{-\lambda a} - (-e^0) = 1 - e^{-\lambda a}$.

Conclusion : $P(X \leqslant a) = 1 - e^{-\lambda a}$. CQFD

Pour **(P$_2$)** : On peut faire soit un calcul direct, soit utiliser l'événement contraire.

1ère méthode : $P(X \geqslant a) = \int_a^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt = \lim_{x \to +\infty} \int_a^x \lambda e^{-\lambda t} dt$.

Or, une primitive de f sur $[0;+\infty[$ est la fonction F définie par $F(x) = -e^{-\lambda x}$.

Donc : $\int_a^x \lambda e^{-\lambda t} dt = [F(t)]_a^x = F(x) - F(a) = -e^{-\lambda x} - (-e^{-\lambda a}) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda x}$.

Par passage à la limite lorsque x tend vers $+\infty$, on obtient : $P(X \geqslant a) = e^{-\lambda a}$.

2ème méthode : $P(X \geqslant a) = 1 - P(X < a) = 1 - P(X \leqslant a) = 1 - (1 - e^{-\lambda a}) = e^{-\lambda a}$.

D'où le résultat.

Pour **(P$_3$)** : Avec les notations ci-dessus, on a :

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda t} dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$
$$= -e^{-\lambda b} - (-e^{-\lambda a}) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b} \quad . \quad \text{CQFD}$$

3.2) Propriété de durée de vie sans vieillissement

Propriété (ROC)

Soit λ un nombre réel strictement positif.
Soit X une variable aléatoire qui *suit la loi exponentielle de paramètre* λ. Alors, X vérifie la propriété de ***durée de vie sans vieillissement***, c'est-à-dire, pour tous réels positifs $t, h \in [0;+\infty[$:

(P$_4$) : $P_{X \geqslant t}(X \geqslant t + h) = P(X \geqslant h)$

La probabilité de l'événement ($X \geq h$) est ***indépendant*** *de l'instant initial t.*

Démonstration.

Par définition, la fonction de densité de probabilité associée à cette v.a. est la fonction f définie par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$. Soit F la primitive de f définie par $F(x) = -e^{-\lambda x}$.

Par définition de la probabilité conditionnelle, on a :

$$P_{X\geqslant t}(X\geqslant t+h)=\frac{P((X\geqslant t+h)\cap(X\geqslant t))}{P(X\geqslant t)} = \frac{P(X\geqslant t+h)}{P(X\geqslant t)}$$

Or on sait que, d'après la propriété (P_2), pour tous réels positifs $t, h\in[0;+\infty[$:

$P(X\geqslant t+h)=e^{-\lambda(t+h)}$ et $P(X\geqslant t)=e^{-\lambda t}$. Mais alors :

$$P_{X\geqslant t}(X\geqslant t+h)=\frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}}=\frac{e^{-\lambda t-\lambda h}}{e^{-\lambda t}}=\frac{e^{-\lambda t}\times e^{-\lambda h}}{e^{-\lambda t}}=e^{-\lambda h}=P(X\geqslant h)$$. CQFD

Conclusion : pour tous réels positifs $t, h\in[0;+\infty[$:

$$P_{X\geqslant t}(X\geqslant t+h)=P(X\geqslant h)$$

3.3) Espérance de la loi exponentielle

Définition et propriété

Soit λ un nombre réel strictement positif.
Soit X une variable aléatoire qui *suit la loi exponentielle de paramètre* λ . Alors, l'espérance de X est ***définie*** par : $E(X)=\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x t\,f(t)\,dt$.

Propriété

Soit λ un nombre réel strictement positif.
Soit X une variable aléatoire qui *suit la loi exponentielle de paramètre* λ . Alors, l'espérance de X est ***donnée*** par **(P_5)** : $E(X)=\frac{1}{\lambda}$.

Démonstration.

Soit $x\in[0;+\infty[$. La fonction g définie par $g(t)=t\,f(t)=\lambda t e^{-\lambda t}$ est continue sur $[0; x]$, donc elle admet des primitives. Or, pour tout réel positif $t\in[0;x]$:

$(te^{-\lambda t})'=e^{-\lambda t}-\lambda t e^{-\lambda t}$. Il s'en suit que : $\lambda t e^{-\lambda t}=e^{-\lambda t}-(te^{-\lambda t})'$.

Ce qui donne : $g(t)=t\,f(t)=e^{-\lambda t}-(te^{-\lambda t})'$.

Une primitive de la fonction g est donc la fonction G définie par :

$G(t)=\frac{-1}{\lambda}e^{-\lambda t}-te^{-\lambda t}$.

On a donc :

$$\begin{aligned}\int_a^x t\,f(t)\,dt&=[G(t)]_0^x=G(x)-G(0)\\&=\left[\frac{-1}{\lambda}e^{-\lambda x}-xe^{-\lambda x}\right]-\left[\frac{-1}{\lambda}e^{0}-0\right]\\&=\frac{-1}{\lambda}\left(e^{-\lambda x}+\lambda x e^{-\lambda x}\right)+\frac{1}{\lambda}\end{aligned}$$

Lorsque x vers $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-\lambda x}=\lim\limits_{u\to-\infty}e^{u}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\lambda xe^{-\lambda x}=\lim\limits_{u\to-\infty}-ue^{u}=0$.

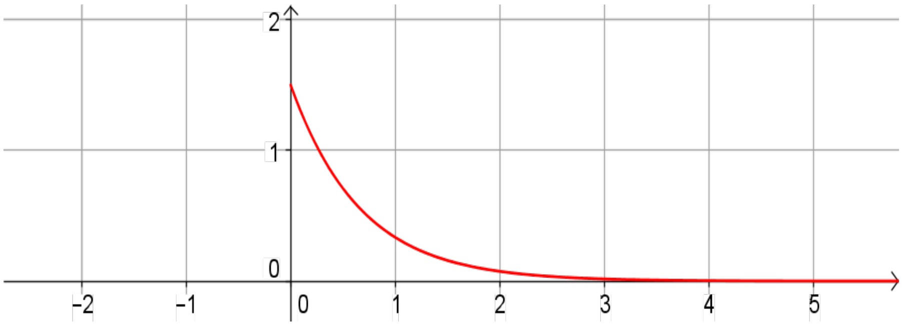
Donc $\boxed{E(X)=\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x t\,f(t)\,dt=\frac{1}{\lambda}}$. CQFD.

Exemple (BAC) : Baccalauréat S - Antilles-Guyane juin 2006 / Exercice n°3

Loi exponentielle et loi binomiale

Partie A

Soit X une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.
On rappelle que $P(X \leqslant a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda t}\, dt$. La courbe donnée ci-dessous représente la fonction f de densité associée.



1°) Interpréter sur le graphique la probabilité $P(X \leq 1)$.
2°) Indiquer sur le graphique où se lit directement le paramètre λ.

Partie B

On pose λ = 1,5.
1. Calculer $P(X \leq 1)$, en donner une valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-3} près par excès.
2. Calculer $P(X > 2)$.
3. Déduire des calculs précédents l'égalité suivante : $P(1 \leq X \leq 2) = 0{,}173$ à 10^{-3} près.
4. Calculer l'intégrale $G(x) = \int_0^x 1{,}5t\, e^{-1{,}5t}\, dt$.
Déterminer la limite quand x tend vers $+\infty$ de $G(x)$. En déduire l'espérance de la variable X.

Partie C

Une machine outil fabrique des cylindres. On mesure l'écart, en dixièmes de millimètres, entre le diamètre des cylindres et la valeur de réglage de la machine. On suppose que cet écart suit une loi exponentielle de paramètre λ = 1,5.

- Si l'écart est inférieur à 1, le cylindre est accepté.
- Si l'écart est compris entre 1 et 2,on procède à une rectification qui permet d'accepter le cylindre dans 80 % des cas.
- Si l'écart est supérieur à 2, le cylindre est refusé.

1°) On prélève au hasard un cylindre dans la production.
a) Montrer que la probabilité qu'il soit accepté est égale à 0,915 à 10^{-3} près.
b) Sachant qu'il est accepté, quelle est la probabilité qu'il ait subi une rectification ?
2°) On prélève de manière indépendante dix cylindres de la production. On suppose que le nombre de cylindres suffisamment important pour assimiler ce tirage à un tirage successif avec remise.
a) Quelle est la probabilité que les dix cylindres soient acceptés ?
b) Quelle est la probabilité qu'au moins un cylindre soit refusé ?

Corrigé. Suivez le lien