### Intégration- Calcul des primitives

# Introduction à la notion d'intégrale

## Ce que dit le programme :

| CONTENUS | CAPACITÉS ATTENDUES | COMMENTAIRES |
|---|---|---|
| **Intégration :** ✓<br>Définition de l'intégrale d'une fonction continue et positive sur $[a\,;\,b]$ comme aire sous la courbe.<br>Notation $\int_a^b f(x)\,dx$<br>**Théorème** : Si f est une fonction continue et positive sur $[a\,;\,b]$, la fonction F définie par $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ est dérivable sur $[a\,;\,b]$, et a pour dérivée $f$. | | On s'appuie sur la notion intuitive d'aire rencontrée au collège et sur les propriétés d'additivité et d'invariance par translation et symétrie.<br><br>On peut mener un calcul approché d'aire (parabole, hyperbole, etc.) pour illustrer cette définition.<br><br>Il est intéressant de présenter le principe de la démonstration du thoérème dans le cas où f est positive et croissante. |
| **Primitive d'une fonction continue sur un intervalle.**<br><br>**Théorème** : toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.<br><br>**Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque.**<br><br>Linéarité, positivité, relation de Chasles.<br><br>**Valeur moyenne.** | • Déterminer des primitives des fonctions usuelles par lecture inverse du tableau des dérivées.<br>• Connaître et utiliser les primitives de $u'e^u$, $u'u^n$ ($n$ entier relatif, différent de $-1$) et pour $u$ strictement positive, $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ et $\frac{u'}{u}$.<br><br>• Calculer une intégrale.<br><br>• Utiliser le calcul intégral pour déterminer une aire.<br><br>• Encadrer une intégrale.<br><br>• Pour une fonction monotone poisitive, mettre en oeuvre un algorithme pour déterminer un encadrement d'une intégrale. | Une primitive $F$ de la fonction continue et positive $f$ étant connue, on a : $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$.<br><br>Il est intéressant de démontrer ce théorème dans le cas d'un intervalle fermé borné, en admettant que la fonction a un minimum. On admet le cas général.<br>On fait observer que certaines fonctions comme $x \mapsto \exp(-x^2)$ n'ont pas de primitive « explicite ».<br><br>**La formule** $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$ établie pour une fonction continue et positive, est étendue au cas d'une fonction continue de signe quelconque.<br>L'intégration par parties n'est pas un attendu du programme.<br>La notion de valeur moyenne est illustrée par des exemples issus d'autres disciplines.<br><br>• [SPC] Mouvement uniformément accéléré.<br>• [SI] Valeur moyenne, valeur efficace dans un transfert énergétique.<br>• [AP] *Calcul du volume d'un solide* |

# I. Notion d'intégrale

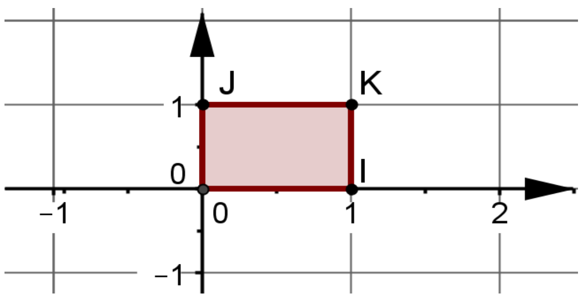
## 1.1) Unité d'aires

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O\,;I\,;J)$. On appelle unité d'aire et on note 1u.a., le nombre 1u.a. = OI x OJ. = *aire du "rectangle unité"* OIKJ.

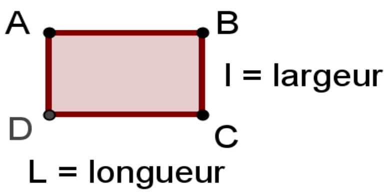
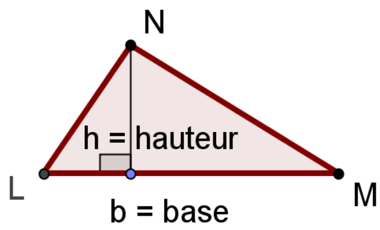
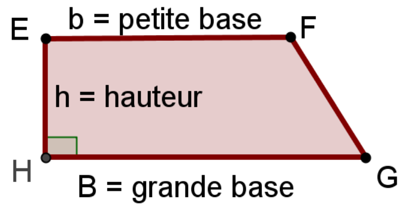
**Exemples** :

Dans un repère orthogonal $(O\,;I\,;J)$ d'unités graphiques OI = 3cm et OJ = 2cm, on a : 1u.a. = 3 x 2 = 6cm².

Dans un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$ d'unité graphique OI = OJ = 2cm, on a : 1u.a. = 2 x 2 = 4cm².



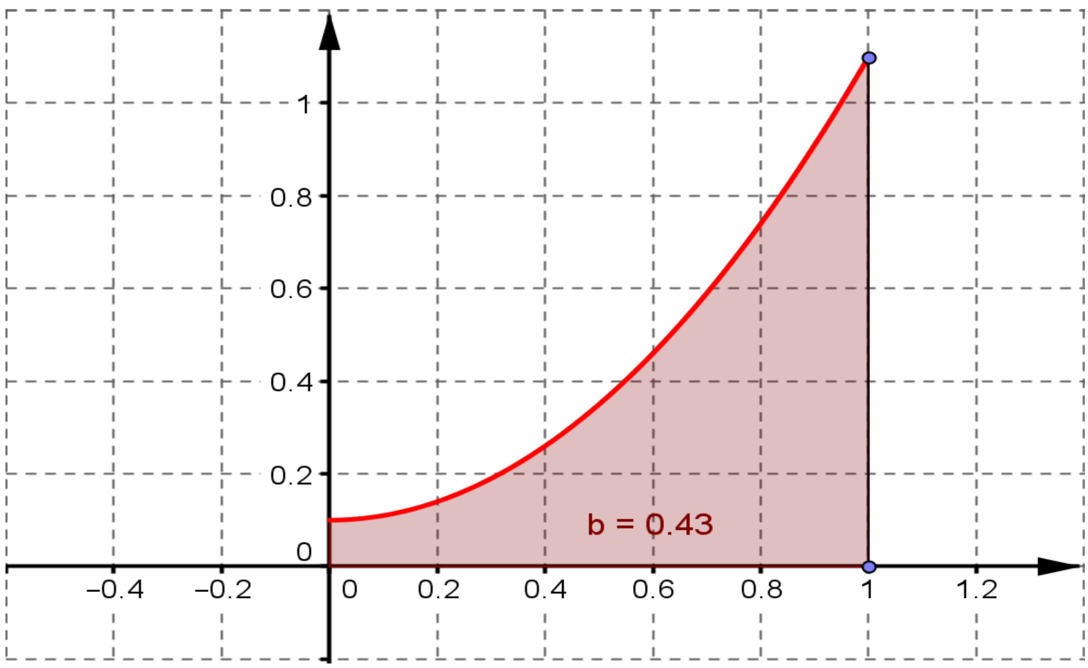
Rappels de 6ème :

| Aire du rectangle | Aire du triangle | Aire du trapèze |
|---|---|---|
|   $Aire=L\times l$ |   $Aire=\dfrac{b\times h}{2}$ |   $Aire=\dfrac{(b+B)\times h}{2}$ |

## 1.2) Activité : Déterminer l'aire sous une courbe

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O;I;J)$. Soit $f$ une fonction *définie*, *continue* et *positive* sur un intervalle $[a;b]$. On se propose de déterminer un encadrement de la valeur de l'aire $A(f)$ de *la partie (coloriée) du plan délimitée par la courbe $C_f$, l'axe des abscisses et les deux droites (verticales) d'équations* $x=a$ *et* $x=b$.

**Exemple** : Soit $f$ la fonction définie sur [0 ; 1] par $f(x)=x^2+0{,}1$. $f$ est *définie*, *continue* et *positive*. De plus, ici, elle est *croissante* sur l'intervalle [0 ; 1]. Sa courbe représentative $C_f$ est un morceau de parabole.

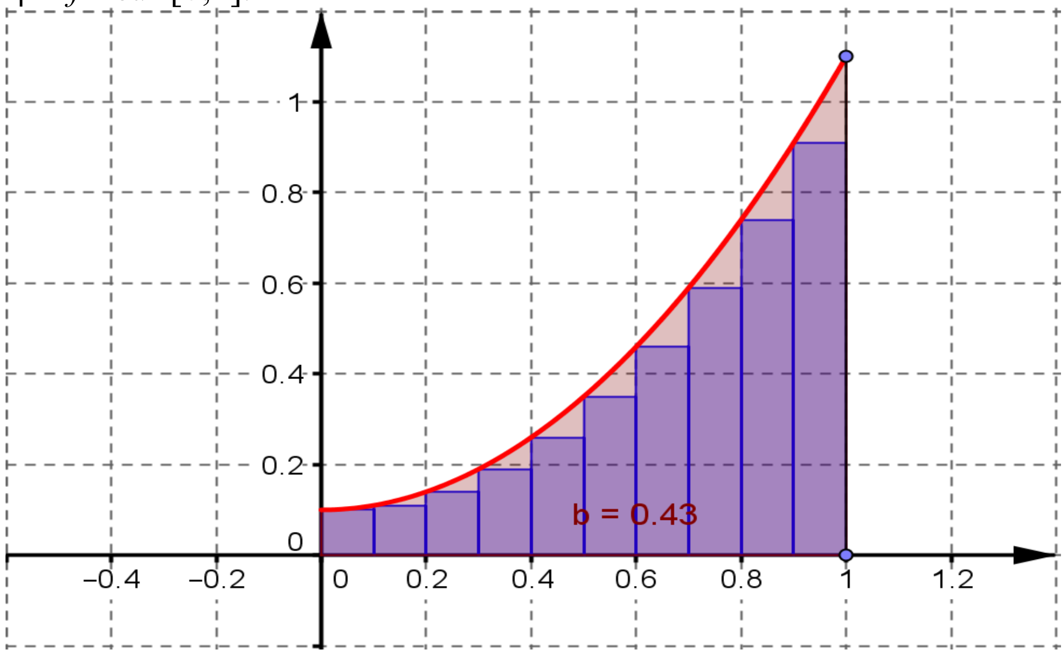



Pour cela, nous allons « *subdiviser* » (*i.e.* partager) l'intervalle [0 ; 1] en $n$ sous-intervalles (ici $n=10$ ), de même longueur $\dfrac{b-a}{n}$, de bornes : $x_k=a+k\times\dfrac{b-a}{n}$.

Avec $n=10$, $x_k=\dfrac{k}{10}$ donc on a : $x_0=0\,;\,x_1=0{,}1\,;\,x_2=0{,}2\,;\cdots;\,x_{10}=1$ .

**1ère étape** :

- On définit une première fonction $\varphi$ constante sur chacun de ces sous-intervalles $[x_k ; x_{k+1}[$ ; $0 \leqslant k \leqslant n-1$ ; et égale au minimum $m_k = f(x_k)$ de la fonction $f$ sur chacun de ces sous-intervalles, $\varphi(1) = f(1)$ . On a alors : $\varphi \leqslant f$ sur [0;1].




On note $\Delta x = x_{k+1} - x_k$ = largeur de chaque rectangle.

$m_k = f(x_k) = f\left(a + k \times \dfrac{b-a}{n}\right)$ = hauteur du rectangle de base $[x_k ; x_{k+1}[$ .

$m_k$ = minimum de la fonction $f$ sur chacun de ces sous-intervalles ($f$ est croissante).

L'aire du rectangle de base $[x_k ; x_{k+1}[$ est donnée par : $m_k \times (x_{k+1} - x_k) = m_k \times \Delta x$ .

Donc l'aire $A(\varphi)$ = somme des aires de tous les rectangles situés sous la courbe.

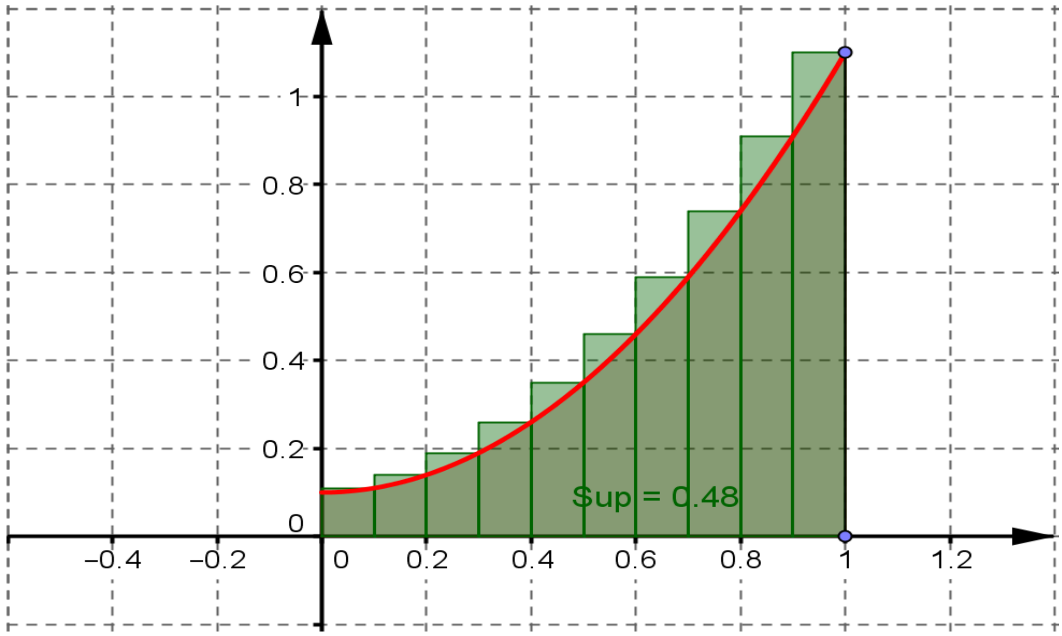
Donc : $A(\varphi) = \sum_{k=0}^{k=n-1} m_k \times \Delta x$ . Par construction, nous obtenons : $A(\varphi) \leqslant A(f)$ (1)

Par conséquent : $$\sum_{k=0}^{k=n-1} m_k \times \Delta x \leqslant A(f) \quad (1)$$

**2ème étape** :

- On définit une deuxième fonction $\psi$ constante sur chacun de ces sous-intervalles $[x_k ; x_{k+1}[$ ; $0 \leqslant k \leqslant n-1$ et égale au maximum $M_k$ de la fonction $f$ sur chacun de ces sous-intervalles, $\psi(1) = f(1)$ .
  $M_k = f(x_{k+1})$ = hauteur du rectangle de base $[x_k ; x_{k+1}[$ .
  Avec un raisonnement analogue au précédent, on a : $f \leqslant \psi$ sur [0;1].
  Par construction, nous obtenons : $A(f) \leqslant A(\psi)$ (2)

  Par conséquent : $$A(f) \leqslant \sum_{k=0}^{k=n-1} M_k \times \Delta x \quad (2)$$




Par conséquent : à partir des inégalités (1) et (2), on obtient l'encadrement suivant :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{k=n-1} m_k \times \Delta x \leqslant A(f) \leqslant \sum_{k=0}^{k=n-1} M_k \times \Delta x}$$

– Avec le logiciel GéoGebra

$f(x)$ = **Fonction**[ <Fonction>, <x initial>, <x final>] (*restriction de f à un intervalle*).
$A(f)$ = **Integrale**[<Fonction>,<x initial>,<x final>] = valeur exacte de l'aire à encadrer.
$A(\varphi)$ = **SommeInférieure**[<Fonction>, <x initial>, <x final>, <Nombre Rectangles>]
$A(\psi)$ = **SommeSuérieure**[<Fonction>, <x initial>, <x final>, <Nombre Rectangles>]
pour construire les rectangles inférieurs ou supérieurs...

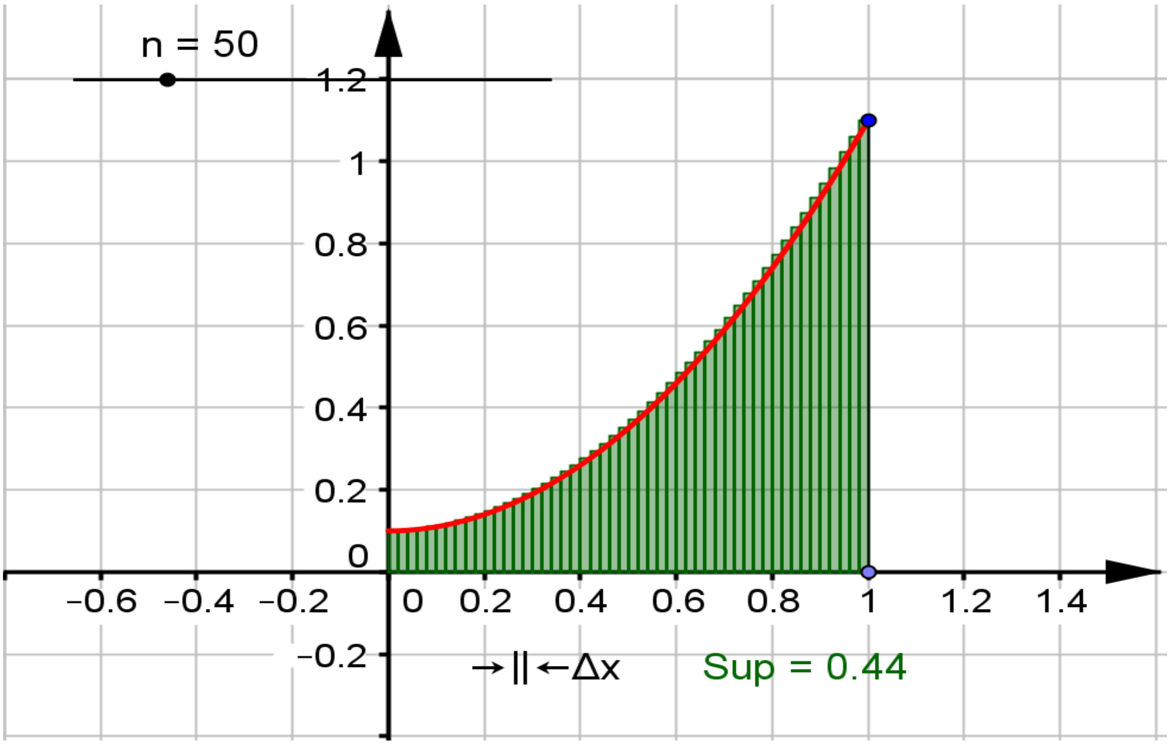
On peut créer un « ***curseur*** » appelé ***n*** prenant ses valeurs entre 1 et 100 ou 1 et 1000 avec une incrémentation = 1, puis remplacer **<Nombre Rectangles>** par ***n***.

– Avec un algorithme

```
Variables
        n, k : entiers ;
        S : réel ;
Initialisation
    Affecter à S la valeur 0 ;
Début_Algorithme
    Lire n ;
    Pour k allant de 0 à (n-1) Faire
         Affecter à S la valeur S+f(a+k(b-a)/n)*(b-a)/n ;
    FinPour
    Afficher message "A(phi)="
    Afficher S
Fin_Algorithme
```

On peut fixer une marge d'erreur, par exemple $\varepsilon=10^{-p}$ et modifier cet algorithme pour calculer des valeurs approchées de $A(f)$ à $\varepsilon$ près... $\varepsilon=A(\psi)-A(\varphi)$ .

**3ème étape** :
On fait prendre à $n$ des valeurs de plus en plus grandes. Visualisez le fichier créé le logiciel GéoGebra suivant : « Calcul d'aire ».




Lorsque $n$ tend vers $+\infty$ , la largeur $\Delta x$ des sous-intervalles devient très petite et tend vers 0. On appelle *dx* le *plus petit élément de longueur* de l'écran.
On suppose par exemple que $dx = 1\text{pixel}$. Alors, les sous-intervalles deviennent de la forme $[x;x+dx]$ où $x$ parcourt l'intervalle $[a\ ;\ b]$. Ainsi, $x$ devient donc la *variable d'indexation*.

La fonction $f$ étant continue sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$, le minimum et le maximum de la fonction sur chacun de ces sous-intervalles se rapprochent pour devenir pratiquement confondus : $m_k = M_k = f(x)$.

Alors l'aire du domaine sous la courbe est donnée par : $A(f) = \sum_{x=a}^{x=b} f(x) \times dx$

Nous utilisons un autre symbole pour des "***sommations continues***", et on écrit :

$$A(f) = \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx \quad \text{ou plus simplement} \quad A(f) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Le symbole « $\int$ » n'est autre que la lettre « S » allongée et stylée !!

C'est Leibniz (mathematicien et philosophe allemand, 1646 – 1716) qui s'est servi de l'initiale du mot latin *summa*, « somme », pour créer le symbole de sommation continue donc de l'intégale.

Remarque : Plusieurs exercices d'application directe de cette technique, parmettent de *calculer les limites de suites* qui s'écrivent *sous la forme de "sommes"* $u_n = \mathrm{Inf}_f(n)$ ou $v_n = \mathrm{Sup}_f(n)$, d'une certaine fonction qu'il faut préciser.