Intégration- Calcul des primitives

Ce que dit le programme :

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Intégration : ✓ Définition de l'intégrale d'une fonction continue et positive sur $[a\ ;\ b]$ comme aire sous la courbe. Notation $\int_a^b f(x)dx$ **Théorème** : Si f est une fonction continue et positive sur $[a\ ;\ b]$, la fonction F définie par $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur $[a\ ;\ b]$, et a pour dérivée *f*.		On s'appuie sur la notion intuitive d'aire rencontrée au collège et sur les propriétés d'additivité et d'invariance par translation et symétrie. On peut mener un calcul approché d'aire (parabole, hyperbole, etc.) pour illustrer cette définition. Il est intéressant de présenter le principe de la démonstration du thoérème dans le cas où f est positive et croissante.
Primitive d'une fonction continue sur un intervalle. **Théorème** : toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives. **Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque.** Linéarité, positivité, relation de Chasles. **Valeur moyenne.**	• Déterminer des primitives des fonctions usuelles par lecture inverse du tableau des dérivées. • Connaître et utiliser les primitives de $u'e^u$, $u'u^n$ (*n* entier relatif, différent de -1) et pour *u* strictement positive, $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ et $\frac{u'}{u}$. • Calculer une intégrale. • Utiliser le calcul intégral pour déterminer une aire. • Encadrer une intégrale. • Pour une fonction monotone poisitive, mettre en oeuvre un algorithme pour déterminer un encadrement d'une intégrale.	Une primitive *F* de la fonction continue et positive *f* étant connue, on a : $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$. Il est intéressant de démontrer ce théorème dans le cas d'un intervalle fermé borné, en admettant que la fonction a un minimum. On admet le cas général. On fait observer que certaines fonctions comme $x :\mapsto \exp(-x^2)$ n'ont pas de primitive « explicite ». **La formule** $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$ établie pour une fonction continue et positive, est étendue au cas d'une fonction continue de signe quelconque. L'intégration par parties n'est pas un attendu du programme. La notion de valeur moyenne est illustrée par des exemples issus d'autres disciplines. • [SPC] Mouvement uniformément accéléré. • [SI] Valeur moyenne, valeur efficace dans un transfert énergétique. • [AP] *Calcul du volume d'un solide*

I. Notion d'intégrale

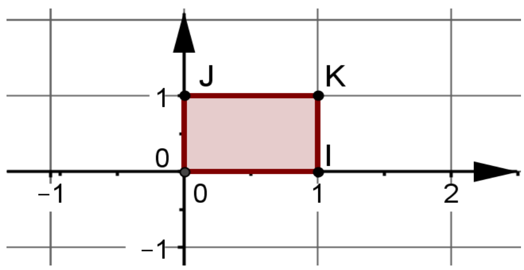
1.1) Unité d'aires

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O\ ;I\ ;J)$. On appelle unité d'aire et on note 1u.a., le nombre 1u.a. = OI x OJ. = *aire du "rectangle unité"* OIKJ.

Exemples :

Dans un repère orthogonal $(O\ ;I\ ;J)$ d'unités graphiques OI = 3cm et OJ = 2cm, on a : 1u.a. = 3 x 2 = 6cm².

Dans un repère orthonormé $(O\ ;I\ ;J)$ d'unité graphique OI = OJ = 2cm, on a : 1u.a. = 2 x 2 = 4cm².



1.2) Activité : Déterminer l'aire sous une courbe

Activité avec le logiciel GéoGebra

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O\,;I\,;J)$. Soit f une fonction *définie*, *continue* et *positive* sur un intervalle $[a\,;b]$. L'intégrale de la fonction f sur $[a\,;\,b]$ est définie comme l'aire de la partie du plan située sous la courbe et s'écrit :

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

II. Définition de l'intégrale d'une fonction

2.1) Intégrale d'une fonction continue et positive

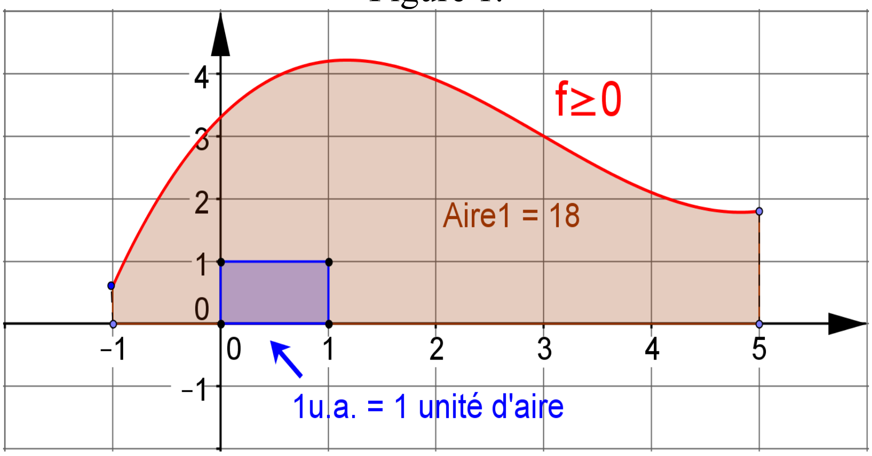
Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O\,;I\,;J)$. Une unité graphique est choisie sur checun des deux axes. On pose : 1u.a. = 1unité d'aire.

Définition 1. :

Soit f une fonction *définie*, *continue* et *positive* (Fig.1) sur un intervalle $[a\,;\,b]$ et C_f sa représentation graphique dans le repère orthogonal $(O\,;I\,;J)$. Alors, **l'intégrale de *a* à *b* de *f***, notée $\int_a^b f(x)\,dx$ est un nombre réel positif égal à ***l'aire*** *de la partie (coloriée) du plan délimitée par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les deux droites (verticales) d'équations $x=a$ et $x=b$.*

Le nombre réel positif $\int_a^b f(x)\,dx$ se lit **« somme de *a* à *b* de *f(x)* dx »** ou encore **« intégrale de *a* à *b* de *f(x)* dx »** .

Figure 1.



Remarque : On dit que ***x*** est une ***variable muette***, car elle peut être remplacée par n'importe quelle autre lettre variant entre a et b. On a alors :

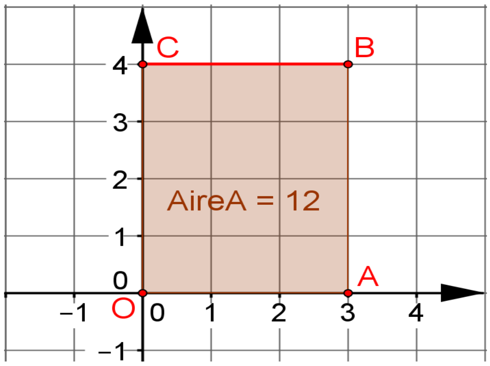
$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^b f(u)\,du=\cdots$$

Exemples :

Calculer les intégrales suivantes : $A=\int_0^4 3\,dx$ et $B=\int_0^4 (x+1)\,dx$

a) **<u>Calcul de A</u>** :

A est égale à l'intégrale de la fonction *f* définie sur [0;3] par $f(x)=4$.



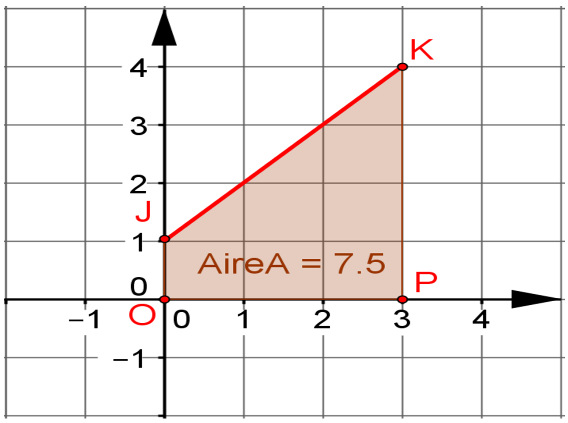
f est une fonction *constante* et égale à 4 sur [0;3].
L'aire sous la courbe est égale à l'aire du rectangle OABC de largeur $\Delta x=3-0=3$
et de longueur (hauteur) $\Delta y=4-0=4$
Donc

$$A=3\times 4=12$$

Donc $A=\int_0^4 3\,dx=12.$

a) **<u>Calcul de B</u>** :

A est égale à l'intégrale de la fonction affine *g* définie sur [0;4] par $g(x)=x+1$. On a bien : $g(0)=1$ et $g(3)=4$.
L'aire sous la courbe est égale à l'aire du trapèze rectangle OPKJ (à retourner !) de petite base $OJ=1$, de grande base $PK=4$
et de hauteur $PO=4$. Donc l'aire est :



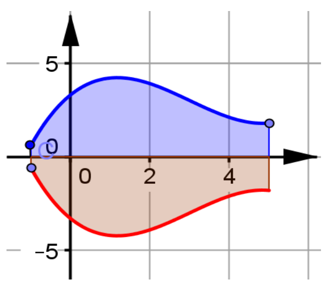
$$B=\frac{(petite\,base+grande\,base)\times hauteur}{2}$$

$$B=\frac{(1+4)\times 3}{2}=7{,}5$$

Donc $B=\int_0^4 (x+1)\,dx=7{,}5$

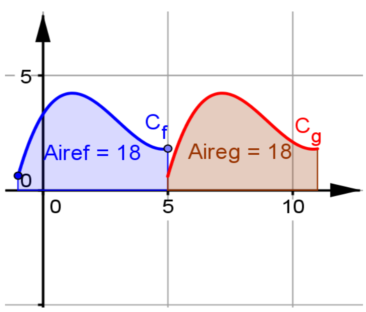
2.2) Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue positive

Depuis le collège, nous avons vu que ***l'aire d'une figure géométrique*** possède certaines propriétés d'***<u>additivité</u>*** et d'***<u>invariance par translation</u>*** et ***<u>par symétrie</u>***.
Ces propriétés s'étendent naturellement à la notion d'intégrale d'une fonction continue et positive sur un intervalle [*a* ; *b*].



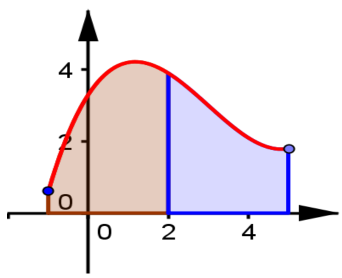
C_g est symétrique de C_f par rapport à l'axes Ox. Donc :

$$\int_{-1}^5 g(x)\,dx=-\int_{-1}^5 f(x)\,dx$$



C_g s'obtient par translation de C_f de vecteur $\vec{u}(6\,;0)$, Donc :

$$\int_{-1}^5 f(x)\,dx=\int_5^{11} g(x)\,dx$$



Il est clair que l'aire totale est égale à la somme des aires des deux parties. Donc :

$$\int_{-1}^5 f(x)\,dx$$
$$=\int_{-1}^2 f(x)\,dx+\int_2^5 f(x)\,dx$$

Nous donnerons toutes les propriétés des intégrales après avoir défini l'intégrale d'une fonction continue quelconque.

2.3) Intégrale d'une fonction continue négative.

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O;I;J)$.

Définition 2. :

Soit f une fonction *définie*, *continue* et ***négative*** sur un intervalle [a ; b], et C_f sa représentation graphique dans le repère orthogonal $(O;I;J)$. Alors, $-f$ ***est positive*** et ***l'intégrale de a à b de f***, notée aussi $\int_a^b f(x)dx$ est un ***nombre négatif*** égal à ***l'opposé de l'intégrale de –f***. Donc : $\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b -f(x)dx$

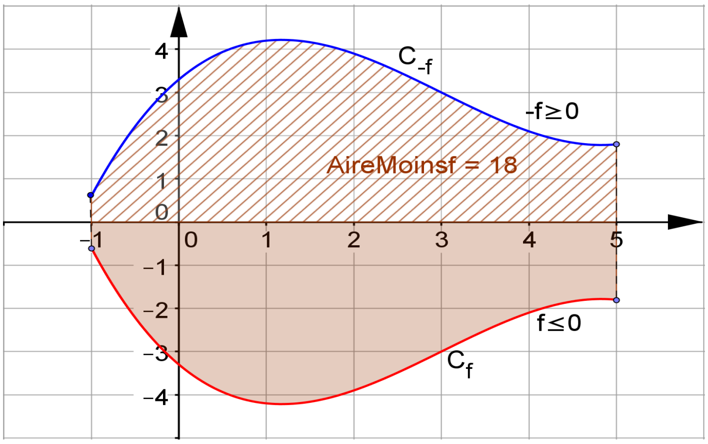


Fig.2 f *négative sur* $[-1;5]$

En effet, les courbes de C_f et de C_{-f} étant symétriques par rapport à l'axe des abscisses, l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe de $f \leqslant 0$, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x=a$ et $x=b$, est égale à l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe de $-f \geqslant 0$, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x=a$ et $x=b$. D'où le résultat.

Il s'ensuit que, si $a < b$:

- Si $f \geqslant 0$ sur [a ; b], alors $\int_a^b f(x)dx \geqslant 0$
- et si $f \leqslant 0$ sur [a ; b], alors $\int_a^b f(x)dx \leqslant 0$

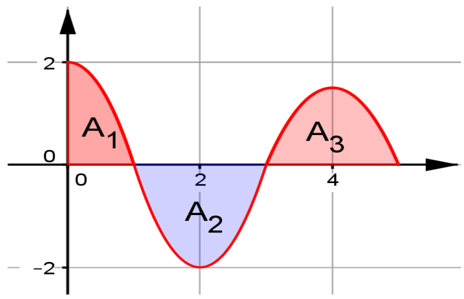
2.4) Intégrale d'une fonction continue quelconque

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O;I;J)$. D'après ce qui précède, on a :

Définition 3. :

Soit f une fonction *définie* et *continue* (Fig.3) sur un intervalle [a ; b]. Alors, **l'ntégrale de *a* à *b* de *f***, notée $\int_a^b f(x)dx$ est égale à ***l'aire algébrique*** (avec un "+" lorsque f est positive et un "–" lorsque la fonction est négative) de la partie du plan délimitée par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les deux droites $x=a$ et $x=b$. Si A_k désigne l'aire (positive) de la k-ième partie, alors :

$$\int_a^b f(x)dx = A_1 - A_2 + A_3$$



2.5) Propriétés des intégrales

a) Propriétés vectorielles de l'intégrale :

Soit f une fonction *définie* et *continue* sur un intervalle I et $a\,;b\,;c \in I$. Alors,

(P$_1$) : $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ (Cherchez les similitudes avec les propriétés des vecteurs)

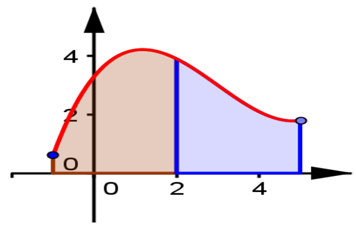
(P$_2$) : $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ **(**Relation de Chasles)

(P$_3$) : $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$.

Démonstration.

(P$_1$) : La largeur de l'intervalle [a ; a] est nulle. D'où le résultat.

(P$_2$) : L'aire algébrique totale est égale à la somme des aires algébriques des deux parties. D'où le résultat.



(P$_3$) : On sait que $\int_a^a f(x)\,dx = 0$. En appliquant la relation de chasles, nous obtenons : $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = 0$. D'où le résultat.

b) Propriétés de linéarité de l'intégrale : (Admis)

Soit f et g deux fonctions *définies* et *continues* sur un intervalle I et $a\,;b \in I$
Alors :

(P$_4$) : $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$ (additivité)

(P$_5$) : $\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$ **(** $k \in \mathbb{R}$. **)** (Multiplication par une constante)

On peut regrouper ces deux propriétés en une seule :

(P$_6$) : $\int_a^b (\alpha f(x)+\beta g(x))dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_a^b g(x)\,dx$ ($\alpha,\beta \in \mathbb{R}$.)

c) Propriétés de positivité de l'intégrale :

Soit f une fonction *définie* et *continue* sur un intervalle I et $a\,;b \in I$ tels que $\boldsymbol{a < b}$.

Alors : **(P$_7$) :** Si pour tout $x \in [a\,;b]: f(x) \geqslant 0$: alors $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$

(P$_{7bis}$) : Si pour tout $x \in [a\,;b]: f(x) \leqslant 0$: alors $\int_a^b f(x)\,dx \leqslant 0$

Démonstration.
(P_7) : Découle de la construction de la notion d'intégrale d'une fonction continue et positive. Pour (P_{7bis}), appliquer P_7 à $-f$.

d) Propriétés de conservation de l'ordre de l'intégrale :

Soit f et g deux fonctions *définies* et *continues* sur un intervalle I et $a\,;b\in I$ tels que $\boldsymbol{a<b}$. Alors :
(P_8) : Si pour tout $x\in[a\,;b],\ f(x)\leqslant g(x)$: : alors $\int_a^b f(x)\,dx\leqslant\int_a^b g(x)\,dx$

Démonstration (P_8) : Appliquer P_7 à $g-f$.

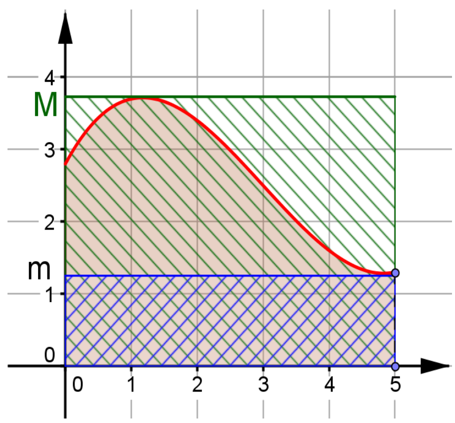
2.6) Encadrement. Inégalité de la moyenne

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O\,;I\,;J)$.

Propriété : Inégalité de la moyenne :

Soit f une fonction *définie* et *continue* sur un intervalle $[a\,;b]$ tel que $\boldsymbol{a<b}$.
(P_9) : Si $\boldsymbol{m}$ et $\boldsymbol{M}$ sont deux nombres réels tels que pour tout $x\in[a\,;b]$, on ait : $m\leqslant f(x)\leqslant M$, alors :

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\,dx\leqslant M(b-a)\ .$$



Démonstration :
Les fonctions $f_1 : x\mapsto m$ et $f_2 : x\mapsto M$, sont constantes sur $[a;b]$. Donc :

$$\int_a^b f_1(x)\,dx=m(b-a)\quad\text{et}\quad\int_a^b f_2(x)\,dx=M(b-a)\ .$$

Or pour tout $x\in[a\,;b]$, on sait que : $m\leqslant f(x)\leqslant M$ donc $f_1(x)\leqslant f(x)\leqslant f_2(x)$.
Comme $\boldsymbol{a<b}$, d'après la propriété de conservation de l'ordre (P_8), on a

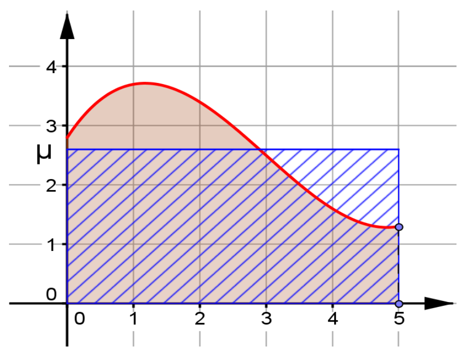
$$\int_a^b f_1(x)\,dx\leqslant\int_a^b f(x)\,dx\leqslant\int_a^b f_2(x)\,dx$$

Par conséquent : $m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\,dx\leqslant M(b-a)$ CQFD.

Définition : Valeur moyenne d'une fonction :

Soit f une fonction *définie* et *continue* sur un intervalle $[a\,;b]$ tel que $\boldsymbol{a<b}$.
Alors, on appelle ***valeur moyenne de la fonction f*** sur l'intervalle $[a\,;b]$, qu'on note μ ou $\mu(f)$ ou parfois $\mu_{[a;b]}(f)$ le ***nombre réel*** défini comme suit :

$$\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\quad(\textit{lire « }\textbf{mu}\textit{ »}).$$



Théorème 1.

Soit f une fonction définie, continue et croissante sur un intervalle $[a;b]$ avec $a < b$.
Alors, il existe au moins un un réel $c \in [a\,;b]$ tel que :

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(c)$$

Démonstration :
Soit μ la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[a\,;\,b]$.
La fonction f est définie, continue et croissante sur l'intervalle $[a;b]$. Donc, pour tout $x \in [a\,;b]$: $f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$. Par suite, d'après l'inégalité de la moyenne, nous savons que $(b-a)\,f(a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant (b-a)\,f(b)$.
Or, $a<b$, donc $b-a>0$. Donc, en divisant par $(b-a)$, on obtient :

$$(b-a)\,f(a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant (b-a)\,f(b)$$

Ce qui se traduit par : $f(a) \leqslant \mu \leqslant f(b)$ ou encore : $\mu \in [f(a); f(b)]$.
Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $c \in [a\,;b]$ tel que $\mu = f(c)$. Donc $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c)$.

Par conséquent : $\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(c)$ CQFD.

III. Primitive d'une fonction continue sur un intervalle

3.1) Définition d'une primitive

Définition :

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I.
On appelle ***primitive de f sur l'intervalle I***, toute fonction ***F***, définie et dérivable sur I et telle que : pour tout $x \in I$: ***F ' (x) = f (x)***.

Exemples :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3$.
La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=3x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$: $F'(x) = 3 = f(x)$. Mais, alors, la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x)=3x+5$ est aussi une primitive de f sur $\mathbb{R}$ car, on a aussi $G'(x) = 3 = f(x)$.
Plus généralement, toute fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x)=3x+C$ est aussi une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

3.2) Lien entre deux primitives d'une même fonction

Théorème 2.

Soit f une fonction définie et continue sur ***un intervalle I***.
a) Si ***F est une primitive*** de f sur I, alors f admet ***une infinité de primitives*** sur *I*.
b) Deux primitives quelconques de f diffèrent d'une constante. Autrement dit :
Pour toute (autre) primitive G de f sur I, ***il existe*** une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que :

Pour tout $x \in I$: ***G (x) = F (x) + C***.

Démonstration :
Soit f une fonction définie et continue sur ***un intervalle I***.

- a) Soit ***F est une primitive*** de f sur I. Alors toute fonction G définie sur I par : $G(x) = F(x) + C$, est une primitive de f sur I. En effet, pour tout $x \in I$:
$$G'(x) = (F(x) + C)' = F'(x) + (C)' = f(x) + 0 = f(x).$$
On a donc : $G' = f$. Par suite, G est une primitive de f sur I.
- b) Soit ***F est une primitive*** de f sur I. Donc pour tout $x \in I$: $F'(x) = f(x)$.
Soit G est une autre primitive de f sur I. Donc pour tout $x \in I$: $G'(x) = f(x)$.
Mais alors, pour tout $x \in I$: $(G - F)'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$.
Par conséquent, la fonction $G - F$ est constante sur I.
D'où, ***il existe*** une unique constante $C \in \mathbb{R}$ telle que :
pour tout $x \in I$: $(G - F)(x) = C$, donc $G(x) - F(x) = C$, ou encore :
pour tout $x \in I$: $G(x) = F(x) + C$, CQFD.

Corollaire :

> Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I. Soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$
> Si ***F est une primitive*** de f sur I, alors il existe une unique primitive G de f sur I, vérifiant : $\boldsymbol{G(x_0) = y_0}$. Cette égalité s'appelle ***une condition initiale***.

Démonstration :
Soit f une fonction définie et continue sur ***un intervalle I***. Soit ***F est une primitive*** de f sur I. Soit G toute autre primitive de f sur I. Donc $G(x) = F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$.
On a les équivalences suivantes :
$$G(x_0) = y_0 \text{ (ssi) } F(x_0) + C = y_0 \text{ (ssi) } C = y_0 - F(x_0).$$
La valeur de la constante C est déterminée d'une manière unique. D'où le résultat.
CQFD.

Remarque :

On dit que « ***G*** est ***LA primitive*** de f sur I qui vérifie ***la condition initiale*** $\boldsymbol{G(x_0) = y_0}$.»
Exemple :
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3$.
"***Une***" primitive de f est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = 3x + C$.
Pour déterminer "***La***" primitive F *de* f qui vérifie la condition initiale $F(0) = 5$, il faut calculer la valeur de C. On a :
$$F(0) = 5, \text{ (ssi) } 3 \times 0 + C = 5 \text{ (ssi) } C = 5.$$
Par conséquent, ***la*** primitive F de f qui vérifie la condition initiale $F(0) = 5$, est définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = 3x + 5$.

3.3) Calcul des primitives

Soit f une fonction définie et continue su un intervalle I de $\mathbb{R}$. Nous disposons, pour l'instant, de deux méthodes pour calculer les primitives de f.

1. Soit ***directement***, par lecture inverse des deux tableaux des dérivées des fonctions usuelles et des fonctions composées.
2. Soit, ***par transformation*** de l'expression de f pour se ramener au cas précédent.

D'autres méthodes existent et seront étudiées dans l'enseignement supérieur.

TABLEAU DES PRIMITIVES

Soient u et v deux fonctions ***définies*** sur un intervalle I où elles sont ***continues***.

Fonctions usuelles		***Fonctions composées***	
Fonctions	Primitives	Fonctions	Primitives
0	k	$u'+v'$	$u+v+C$
a	$ax+C$	ku'	$ku+C$
x	$\frac{x^2}{2}+C$	$u'u$	$\frac{u^2}{2}+C$
$x^n, n\neq-1$ $n\in\mathbb{Z}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$	$u'u^n, n\neq-1$ $n\in\mathbb{Z}$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}+C$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+C$	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$ $u>0.$	$2\sqrt{u}+C$,
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}+C$	$\frac{u'}{u^2}$	$\frac{-1}{u}+C$
e^x	e^x+C	$u'e^u$	e^u+C
$\frac{1}{x}$, $x>0$	$\ln x+C$	$\frac{u'}{u}$, $u>0$	$\ln u+C$
$\sin x$	$-\cos x+C$	$u'\sin u$	$-\cos u+C$
$\cos x$	$\sin x+C$	$u'\cos u$	$\sin u+C$

IV. Intégrales et primitives

4.1) Primitive d'une fonction continue

Grâce au calcul intégral, nous allons démontrer que toute fonction définie et continue sur un intervalle I, admet des primitives.

Théorème 3.

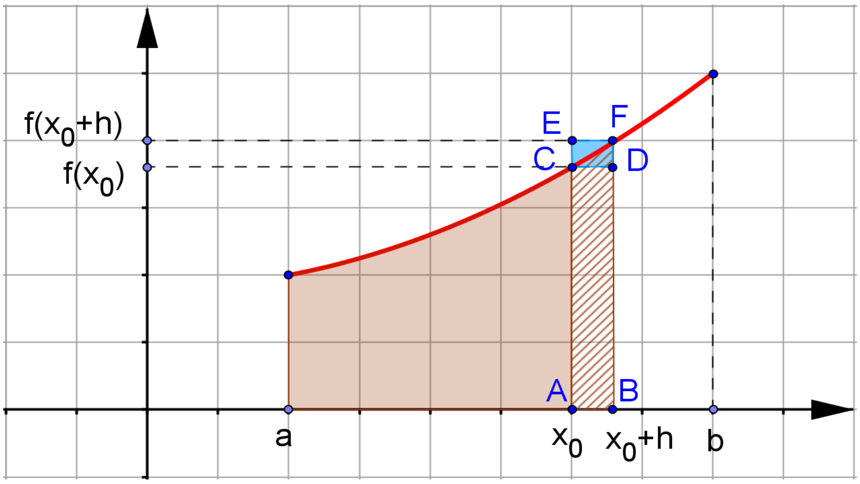
Soit f une fonction définie, continue et positive sur un intervalle $[a; b]$. Alors, la fonction F définie pour tout $x\in[a;b]$ par : $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, est dérivable sur $[a; b]$. , et a pour dérivée f, c'est-à-dire : pour tout $x\in[a;b]$: $F'(x)=f(x)$.
Autrement dit : La fonction F est ***la*** primitive de f sur I, qui s'annule en a.

Démonstration :
Nous allons présenter ici le principe de la démonstration de ce thoérème dans le cas où f est positive et croissante.

Soit f une fonction définie, ***continue, positive*** et ***croissante*** sur un intervalle $[a;b]$.
Soit $x_0\in[a;b]$. Montrons que F est dérivable en x_0 et $F'(x_0)=f(x_0)$.

1ère étape : ***Soit h > 0.***

Cherchons un encadrement du taux d'accroissement : $\dfrac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}$



$F(x_0+h)$ désigne l'aire sous la courbe C_f entre a et x_0+h.
$F(x_0)$ désigne l'aire sous la courbe C_f entre a et x_0.
Donc $F(x_0+h) - F(x_0)$ désigne l'aire sous la courbe entre x_0 et x_0+h. En effet,

$$\boldsymbol{F(x_0+h) - F(x_0) = Aire(ABFC)}.$$

En effet, $F(x_0+h)-F(x_0)=\int_a^{x_0+h} f(t)\,dt-\int_a^{x_0} f(t)\,dt$

$$= \int_a^{x_0+h} f(t)\,dt+\int_{x_0}^{a} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{a} f(t)\,dt+\int_a^{x_0+h} f(t)\,dt$$

Donc : $F(x_0+h)-F(x_0)=\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt$, d'après la relation de Chasles.

Comme $h > 0$, $F(x_0+h) - F(x_0)$ est compris entre les aires des deux rectangles de base $h=AB$ et de hauteurs $f(x_0)=AC$ et $f(x_0+h)=BF$.

Ce qui donne l'encadrement suivant :

$$AB\times AC\leqslant F(x0+h)-F(x0)\leqslant AB\times BF$$

ou encore : $$h\times f(x_0)\leqslant F(x0+h)-F(x0)\leqslant h\times f(x_0+h)$$

En divisant par $h > 0$,on obtient :

$$f(x_0)\leqslant\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}\leqslant f(x_0+h)$$

Par suite, d'après le théorème de comparaison, par passage à la limite, on obtient :

$$f(x_0)\leqslant\lim_{h\to 0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}\leqslant\lim_{h\to 0} f(x_0+h).$$

Or, par hypothèse, la fonction f est continue sur $[a; b]$, donc, en particulier en $x_{0.}$

Donc : $\lim_{h\to 0} f(x_0+h)=f(x_0)$. Ce qui donne : $f(x_0)\leqslant F'(x_0)\leqslant f(x_0)$.

Par conséquent : La fonction F est dérivable ***à droite*** en x_0 et $F'(x_0)=f(x_0)$.

2ème étape : ***Soit h < 0.*** Une démonstration analogue montre que la fonction F est dérivable ***à gauche*** en x_0 et $F'(x_0)=f(x_0)$.

Conclusion : ***La fonction F est dérivable en*** $\boldsymbol{x_0}$ ***et*** $\boldsymbol{F'(x_0)=f(x_0)}$

Théorème 4.

Soit f une fonction définie, continue et positive sur un intervalle [a; b]. Alors, pour toute primitive F de f sur [a;b], on a : $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

Démonstration :

Soit F une primitive de f sur [a;b]. D'après le théorème précédent, la fonction F_1 : $x \mapsto F_1(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est aussi une primitive de f sur [a;b], avec $F_1(a) = 0$.

Donc, d'après le théorème 2, il existe une constante C telle que pour tout $x \in [a;b]$:
$F(x) = F_1(x) + C.$ Mais alors $F(a) = F_1(a) + C = 0 + C = C.$

Il s'en suit que pour tout $x \in [a;b]$: $F(x) = F_1(x) + C.$.

En particulier pour $x = b$: $F_1(b) = \int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$

Ce qu'on peut écrire encore : $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ CQFD

Remarque : On écrit généralement, $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ et on lit « l'intégrale entre a et b de f de x dx est égale à ***"F de x, à prendre entre a et b"*** et est égale à F de b moins F de a »

Théorème 5.

Toute fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ admet des primitives sur cet intervalle.

Démonstration :

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Montrons que f admet des primitives sur tout intervalle fermé borné $[a;b]$ contenu dans I. Soit $a, b \in I$, tels que $a < b$. On admet que la fonction a un minimum m sur [a;b].

La fonction $g : x \mapsto g(x) = f(x) - m$ est définie, continue et positive sur $[a;b]$.

Donc, d'après le théorème 4, la fonction g admet des primitives. Soit G une primitive de g sur l'intervalle [a;b].

Donc, pour tout $x \in [a;b]$, $G'(x) = g(x)$, donc $G'(x) = f(x) - m.$
Mais alors, pour tout $x \in [a;b]$, $f(x) = G'(x) + m.$
On définit une nouvelle fonction F sur [a;b] par : $F(x) = G(x) + m\,x.$
Cette fonction F est dérivable sur [a;b] comme composée de fonctions dérivables.
De plus, pour tout $x \in [a;b]$: $F'(x) = G'(x) + m = f(x).$
Par conséquent : F est une primitive de f sur [a;b]. CQFD

Remarque : Certaines fonctions comme la fonction $f : x \mapsto e^{-x^2}$, sont continues sur $\mathbb{R}$, donc admettent des primitives sur $\mathbb{R}$, mais n'ont pas de primitive «explicite» (finie) à l'aide des fonctions usuelles. Voir plus loin [Enseignement Supérieur].

V. Application au calcul d'aires

5.1) Calcul de l'aire sous une courbe

Comme conséquence directe de tout ce qui précède, nous pouvons énoncer les deux théorèmes suivants :

Théorème 6.

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a;b]$ de $\mathbb{R}$ et C_f sa représentation graphique dans le repère orthogonal $(O;I;J)$. Soit F une primitive de f sur cet intervalle. Alors, l'aire *A de la partie du plan délimitée par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les deux droites (verticales) d'équations $x=a$ et $x=b$. est donnée, en unités d'aires, par :*

- Si $f \geqslant 0$ sur $[a; b]$, alors : $A = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$;
- Si $f \geqslant 0$ sur $[a; c]$ et $f \leqslant 0$ sur $[c;b]$ alors : $A = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b (-f(x))\,dx$

  ou encore : $A = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx$

Exemple : *Soit f la fonction définie sur* $[0;2]$ *par* $f(x) = x^2 - 3x + 2$ *dans un repère orthogonal d'unités graphiques* OI = 2cm *et* OJ =3cm. *Calculer l'aire, en* u.a. *puis en* cm², *du domaine délimité par* C_f, *l'axe des abscisses et les droites d'équations* $x = 0$ *et* $x = 2$.

Pour tout $x \in [0;2] : f(x) = (x-1)(x-2)$. Donc, la fonction f est définie continue et positive sur $[0;1]$ et négative sur $[2;3]$. ***Une*** primitive F de f sur $[0;2]$ est définie par $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3 \times x^2}{2} + 2x$

[Je n'ai pas besoin de la constante pour le calcul d'aires, puisqu'elle disparaît en faisant la soustrac-tion $F(b) - F(a)$]. Donc, l'aire est donnée par :

$$A = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 (-f(x))\,dx = [F(1) - F(0)] - [F(2) - F(1)] = 1\,u.a.$$

Or , $1\,u.a. = 2 \times 2 = 4\,cm^2$ donc $A = 1 \times 4 = 4\,cm^2$

5.2) Calcul de l'aire entrte deux courbes

Théorème 7.

Soit f et g deux fonctions définies et continues sur un intervalle $[a;b]$ de $\mathbb{R}$ et C_f et C_g leurs représentations graphiques dans le repère orthogonal $(O;I;J)$. On suppose que $f \geqslant g$ sur $[a;b]$. Alors, l'aire $\mathscr{A}$ *de la partie du plan délimitée par les deux courbes C_f et C_g et les deux droites d'équations $x=a$ et $x=b$. est donnée par :* $\mathscr{A} = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$ exprimée en unités d'aires (u.a).

Exemple : Voir exercices.

A SUIVRE