Les nombres complexes

Ce que dit le programme :

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
1ère partie ✔ **Forme algébrique, conjugué.** Somme, produit, quotient. Équation du second degré à coefficients réels. **Représentation géométrique.** Affixe d'un point, d'un vecteur.	• Effectuer des calculs algébriques avec des nombres complexes. • Résoudre dans **C** une équation du second degré à coefficients réels. • Représenter un nombre complexe par un point ou un vecteur. • Déterminer l'affixe d'un point ou d'un vecteur.	On introduit dans ce chapitre des éléments lui donnant une dimension historique. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$.
2ème partie **Forme trigonométrique :** ***- module et argument***, interprétation géométrique dans un repère orthonormé direct ; ***- notation exponentielle***.	• Passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique et inversement. • Connaître et utiliser la relation $z\bar{z}=\|z\|^2$ • Effectuer des opérations sur les nombres complexes écrits sous différentes formes.	La notation exponentielle est introduite après avoir montré que la fonction $\theta \mapsto \cos\theta + i\sin\theta$ vérifie la même relation fonctionnelle que la fonction exponentielle. Les nombres complexes permettent de mémoriser les formules trigonométriques d'addition et de duplication vues en première. [SI] Analyse fréquentielle d'un système.

I. Enesemble des nombres complexes

1.1) Introduction

Le plus petit ensemble infini construit par les mathématiciens est l'ensemble $\mathbb{N}$ des nombres des entiers naturels pour le comptage des individus.

– L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels est le plus petit ensemble qui vérifie les deux axiomes suivants :
  a) 0 appartient à $\mathbb{N}$: $0\in\mathbb{N}$;
  b) Tout élément de $\mathbb{N}$ admet un successeur ; pour tout x : [$x\in\mathbb{N}\Rightarrow x+1\in\mathbb{N}$].

  On définit dans $\mathbb{N}$ deux opérations « internes » : l'addition et la multiplication.

  Certaines équations de la forme $x + a = b$ n'admettent pas de solution dans $\mathbb{N}$.

– Qu'à cela ne tienne ! On construit alors un nouvel ensemble, noté $\mathbb{Z}$ des nombres relatifs, $\mathbb{Z}=\mathbb{N}\cup(-\mathbb{N})=\{\cdots;-3;-2;-1;0;1;2;3;\cdots\}$ dans lequel toutes ces équations ont des solutions. Ex: $x + 6 = 2$, a pour solution $x = -4$. On dit que $\mathbb{Z}$ est une ***extension*** de $\mathbb{N}$ pour les opérations d'addition et de multiplication.

  Mais, là aussi, certaines équations de la forme $ax = b$ n'admettent pas de solution dans $\mathbb{Z}$.

– Qu'à cela ne tienne ! On construit un nouvel ensemble, noté $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, qui servent à partager en parts : $\mathbb{Q} =\{ \frac{a}{b}$ tels que $a\in\mathbb{Z}$ et $b\in\mathbb{N}, b\neq 0$ } dans lequel toutes ces équations ont des solutions. Ex: $3x = 7$ a pour solution $x = 7/3$. On dit que $\mathbb{Q}$ est une ***extension*** de $\mathbb{Z}$ pour les opérations d'addition et de multiplication.

  Mais, là aussi, certaines équations de la forme $x^2 = a$, $a > 0$, par exemple pour déterminer la diagonale du carré de côté 1, n'admettent pas de solution dans $\mathbb{Q}$.

– Qu'à cela ne tienne ! On construit un nouvel ensemble, noté $\mathbb{R}$ de tous les nombres réels, rationnels ou irrationnels, dans lequel toutes ces équations ont des solutions. Ex : $x^2 = 2$ a pour solutions $x=-\sqrt{2}$ ou $x=\sqrt{2}$. On dit que $\mathbb{R}$ est une ***extension*** de $\mathbb{Q}$ pour les opérations d'addition et de multiplication.

  Mais, là encore, certaines équations de la forme $x^2 = a$, $a < 0$, par exemple $x^2 = -1$, n'admettent pas de solution dans $\mathbb{R}$.

– Qu'à cela ne tienne ! On construit un nouvel ensemble, noté $\mathbb{C}$ des nombres complexes, en adjoignant à $\mathbb{R}$ un nombre imaginaire noté ***i*** dont le carré est égal à – 1 depuis le 16ème siècle ! $\mathbb{C}$ est une ***extension*** de $\mathbb{R}$ pour les opérations d'addition et de multiplication.

  Cette construction a permi, en premier lieu, de définir des solutions à toutes les équations polynomiales à coefficients réels, puis de trouver des applications en physique dans différents domaines : électricité, électromagnétisme, relativité,...

1.2) Définitions

Définition 1.

Il existe un ensemble, noté $\mathbb{C}$ et appelé ensemble des nombres complexes et vérifie les conditions suivantes :

- $\mathbb{C}$ contient tous les nombres réels.
- $\mathbb{C}$ contient un nombre imaginaire, noté *i* tel que $i^2 = -1$.
- $\mathbb{C}$ est muni des mêmes opérations d'addition et de multiplication que dans $\mathbb{R}$.
- Les règles de calcul sont les mêmes que les règles de calcul dans $\mathbb{R}$.

Par conséquent $\mathbb{C}$ constitue une ***extension algébrique*** de $\mathbb{R}$.

Forme algébrique.

Tout nombre complexe z s'écrit d'une manière unique sous la ***forme algébrique*** :
$z = a + ib$, où a et b sont des nombres réels : $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.
a s'appelle la ***partie réelle de z*** et se note : $a = \mathrm{Re}(z)$;
b s'appelle la ***partie imaginaire de z*** et se note : $b = \mathrm{Im}(z)$.

Exemples.

$z_1 = 2+3i$; Re(z) = 2 et Im(z) = 3.
$z_2 = 1+i\sqrt{2}$; Re(z) = 1 et Im(z) = $\sqrt{2}$.
$z_3 = 2$; Re(z) = 2 et Im(z) = 0. z_3 est un nombre réel, sa partie imaginaire est nulle.
$z_4 = 5i$; Re(z) = 0 et Im(z) = 5. z_4 est imaginaire pur, car sa partie réelle est nulle.

Définition 2.

Soit z un nombre complexe qui s'écrit sous la forme algébrique $z = a + ib$, alors

- Si $\mathrm{Im}(z) = 0$, alors z est ***un nombre réel*** ; donc $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$;
- Si $\mathrm{Re}(z) = 0$, alors z est ***"un" imaginaire pur***.

1.3) Premières propriétés

Théoème 1.

a) Un nombre complexe est ***nul*** si et seulement si ***sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nulles***.

Autrement dit : Soit z un nombre complexe, alors :

[$z = 0$ (ssi) $\text{Re}(z) = 0$ et $\text{Im}(z) = 0$]

b) Deux nombres complexes son ***<u>égaux</u>*** si et seulement si ils ont ***<u>la même partie réelle et la même partie imaginaire</u>***.

Autrement dit : Soit z et z' deux nombres complexes, alors

[$z = z'$ (ssi) $\text{Re}(z) = \text{Re}(z')$ et $\text{Im}(z) = \text{Im}(z')$]

Comme dans $\mathbb{R}$, ***<u>le théorème du produit nul</u>*** est encore valable dans $\mathbb{C}$:

Théoème 2.

Dans $\mathbb{C}$, un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins de ses (ces) facteurs est nul : Pour tous nombres complexes z et z' :

[$z\,z' = 0$ (ssi) $z = 0$ ou $z' = 0$]

Ce théorème nous permettra de résoudre des équations-produits dans $\mathbb{C}$.

I. Opérations sur les nombres complexes

2.1) Les quatre opérations

Définition 3.

Soit z un nombre complexe qui s'écrit sous la forme algébrique $\boldsymbol{z = a + ib}$, alors ***l'opposé*** de z est le nombre complexe $\boldsymbol{-z = -a - ib}$.

On obtient alors $\boxed{\boldsymbol{-(a + ib) = -a - ib}}$

Définition 4.

Soit z et z' deux nombres complexes qui s'écrivent sous la forme algébrique $\boldsymbol{z = a + ib}$ et $\boldsymbol{z' = a' + ib'}$, alors :

La somme de z et z' est définie par : $z+z'=(a+a')+i(b+b')$.

La différence de z et z' est définie par : $z-z'=(a-a')+i(b-b')$.

Le produit de z et z' est défini par : $z\,z'=(aa'-bb')+i(ab'+ba')$.

<u>En effet</u>, si on étend les mêmes opérations sur $\mathbb{C}$ avec les mêmes propriétés, on peut regrouper, changer l'ordre des termes et des facteurs, développer, factoriser,...

Donc : $z + z' = (a + ib) + (a' + ib') = a + a' + ib + ib' = \boldsymbol{(a+a') + i\,(b+b')}$.

Pour : $z - z' = (a + ib) - (a' + ib') = a - a' + ib - ib' = \boldsymbol{(a - a') + i\,(b - b')}$.

De même : $z\,z' = (a + ib)(a' + ib') = aa'+aib' +iba' +i^2bb'$.

Or $\boldsymbol{i^2 = -1}$, donc :

$$z\,z' = aa' +iab'+iba' -bb' = aa' - bb'+ iab' + iba' = \boldsymbol{(aa'-bb') + i\,(ab'+ba')}$$

Définition 5.

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls, qui s'écrivent sous la forme algébrique $\boldsymbol{z = a + ib}$ et $\boldsymbol{z' = a'+ ib'}$, alors :

L'inverse de $z \neq 0$, est défini par : $\dfrac{1}{z} = \dfrac{a}{a^2+b^2} + i\dfrac{-b}{a^2+b^2}$

Le quotient de ***z*** par $z' \neq 0$ est défini par : $\dfrac{z}{z'} = z \times \dfrac{1}{z'}$

Remarque importante :

En effet, d'après l'identité remarquable numéro 3 , il suffit de multiplier le numérateur et le dénominateur par ($a - ib$) car : $\boxed{(a+ib)(a-ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 - i^2 b^2 = a^2 + b^2}$.

Exemples.

Soit ***z*** et ***z'*** les deux nombres complexes suivants : $z = 3+2i$ et $z = 1+i$.

Déterminer la forme algébrique de ***z + z' ; z – z' ; zz' ; 1/z*** et ***z/z'.***

$$z+z' = (3+2i)+(1+i) = 3+1+i(2+1) = 4+3i$$

$$z-z' = (3+2i)-(1+i) = 3-1+i(2-1) = 2+i$$

$$z z' = (3+2i)(1+i) = 3\times 1+3\times i+2i\times 1+2i\times i = 3-2+i(3+2) = 1+5i$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{3+2i} = \frac{1\times(3-2i)}{(3+2i)\times(3-2i)} = \frac{3-2i}{3^2+2^2} = \frac{3}{13}+\frac{-2}{13}i$$

$$\frac{z}{z'} = \frac{3+2i}{1+i} = \frac{(3+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{3-3i+2i+2}{1^2+1^2} = \frac{5-i}{2} = \frac{5}{2}-\frac{1}{2}i$$

2.2) Conjugué d'un nombre complexe

Définition 6.

Soit ***z*** un nombre complexe qui s'écrit sous la forme algébrique ***z = a + ib***, alors le nombre complexe, noté $\bar{z}$ et défini par $\bar{z} = a - ib$ s'appelle ***le conjugué*** de ***z.***

Premières propriétés du conjugué :

Soit ***z*** un nombre complexe qui s'écrit sous la forme algébrique ***z = a + ib***, alors

(P_1) Le conjugué de $\bar{z}$ est évidemment : $\bar{\bar{z}} = z$.

(P_2) $z\bar{z} = a^2+b^2$ et $z\bar{z} \in \mathbb{R}+$

(P_3) $z+\bar{z} = 2\,\mathbf{Re}(z)$ et $z-\bar{z} = 2\boldsymbol{i}\,\mathbf{Im}(z)$

(P_4) z est un nombre réel (ssi) $z = \bar{z}$

(P_5) z est un imaginaire pur (ssi) $z = -\bar{z}$

Démonstration de la propriété **(P_2)** $z\bar{z} = a^2+b^2$.

$z = a+ib$, donc $\bar{z} = a-ib$, donc par application de l'identité remarquable n°3, on obtient : $z\bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2-(ib)^2 = a^2-i^2b^2 = a^2+b^2$ CQFD.

Opérations sur le conjugué :

Soit ***z*** et ***z'*** deux nombres complexes, alors

(P_6) Le cojugué de la somme est égal à la somme des conjugués : $\overline{z+z'} = \bar{z}+\overline{z'}$

(P$_7$) Le cojugué du produit est égal au produit des conjugués : $\overline{zz'}=\overline{z}\,\overline{z'}$

(P$_{7bis}$) Le cojugué d'une puissance est égal à la puissance du conjugué : $\overline{z^n}=\overline{z}^n$

(P$_8$) Le cojugué de l'inverse est égal à l'inverse du conjugué : $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{\overline{z}}$, $z\neq 0$

(P$_9$) Le cojugué du quotient est égal au quotient des conjugués : $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$, $z'\neq 0$

2.3) Application à la résolution d'équations du 1er degré dans C.

Exemples. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les trois équations suivantes :

(E$_1$) : $2iz-1-i=z+2i$; (E$_2$) : $(1+i)\overline{z}-2i=0$ et (E$_3$) : $(1+i)\overline{z}+2iz=1-i$

• Pour l'équation (E$_1$), on procède exactement comme dans $\mathbb{R}$. On regroupe les termes en *z* à gauche et les termes constants à droite :

(E$_1$) $\Leftrightarrow$ $2iz-1-i=z+2i$ $\Leftrightarrow$ $(2i-1)z=1+3i$ $\Leftrightarrow$ $z=\dfrac{1+3i}{-1+2i}$

Il faut maintenant multiplier le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $-1+2i$ pour écrire z sous la forme algébrique. *A terminer.*

• Pour l'équation (E$_2$), même méthode : On regroupe les termes en $\overline{z}$ à gauche et les termes constants à droite :

(E$_2$) $\Leftrightarrow$ $(1+i)\overline{z}-2i=0$ $\Leftrightarrow$ $(1+i)\overline{z}=2i$ $\Leftrightarrow$ $\overline{z}=\dfrac{2i}{1+i}$.

Puis on détermine la forme algébrique de $\overline{z}$ et on prend le conjugué pour trouver *z*.

• L'équation (E$_3$) contient des *z* et des $\overline{z}$. On ne peut plus appliquer la même méthode. Par contre si on pose $z=x+iy$, alors $\overline{z}=x-iy$. On peut revenir à la forme algébrique et appliquer le théorème 1 sur l'égalité des nombres complexes.

$$\begin{aligned}(1+i)\overline{z}+2iz=1-i \quad &\Leftrightarrow \quad (1+i)(x-iy)+2i(x+iy)=1-i\\ &\Leftrightarrow \quad x-iy+ix+y+2ix-2y=1-i\\ &\Leftrightarrow \quad (x-y)+i(3x-y)=1-i\end{aligned}$$

Or, deux nombres complexes son égaux si et seulement si, ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire. On obtient donc un système de deux équations à deux inconnues *x* et *y* que nous savons résoudre :

$$\begin{cases}x-y=1 & \textit{égalité des parties réelles}\\ 3x-y=-1 & \textit{égalité des parties imaginaires}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-y=1\\ 3x-y=-1\end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=y+1\\ 2y=-4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-2+1=-1\\ y=-2\end{cases}$. Par conséquent : $z=-1-2i$.

Conclusion : Cette équation admet une seule solution.

III. Équations du second degré à coefficients réels

3.1) Forme canonique (1ère S)

Nous avons vu en 1ère S le théorème suivant :

Théorème 3.

Tout trinôme du second degré $P(x)=ax^2+bx+c$ (avec $a\neq 0$) s'écrit d'une manière unique sous la forme $P(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$ avec $\alpha=\frac{-b}{2a}$ et $\beta=P(\alpha)$.

Cette forme s'appelle ***la forme canonique*** du trinôme P(x).

Démonstration :

Comme $a\neq 0$, on met a en facteur pour transformer l'écriture de P(x) :

$$P(x)=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c\ ,$$

qu'on peut encore écrire : $$P(x)=a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x\right)+c$$

On reconnaît le début d'une identité remarquable (I.R. n°1), qu'on peut compléter :

$$P(x)=a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}\right)+c$$

Ce qui donne : $$P(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c$$

On réduit au même dénominateur,

$$P(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-b^2+4ac}{4a}$$

On pose $\alpha=\frac{-b}{2a}$ et $\beta=\frac{-b^2+4ac}{4a}$, ou encore $\beta=P\left(\frac{-b}{2a}\right)=P(\alpha)$.

On obtient ainsi la ***forme canonique*** : $P(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$.

3.2) Équation du second degré à coefficients réels

On se propose de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation du second degré à coefficients réels :

$$az^2+bz+c=0\ ,\quad a,b,c\in\mathbb{R}\ \text{ avec }\ a\neq 0$$

La variable $x\in\mathbb{R}$ a été remplacée par la variable $z\in\mathbb{C}$.

D'après ce qui précède, nous pouvons écrire encore :

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

ou encore $$az^2+bz+c=a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)\right]$$

On pose $\Delta=b^2-4ac$, $\Delta\in\mathbb{R}$. Ce nombre s'appelle le ***discriminant*** de l'équation.

En simplifiant par $a\neq 0$, l'équation devient :

$$\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)=0 \text{ ou encore : } \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0 \qquad (*)$$

Alors, on a le théorème suivant :

Théorème n°4 :

On considère, dans $\mathbb{C}$ l'équation du second degré à coefficients réels $az^2+bz+c=0$, $a,b,c\in\mathbb{R}$ (avec $a\neq 0$), on pose $\Delta=b^2-4ac$, et on distingue trois cas :

1er cas : $\Delta>0$, l'équation admet deux solutions ***réelles*** (1ère S) :

$$z_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

2ème cas : $\Delta=0$, l'équation admet une seule solution ***réelle*** (1ère S) : $z_0=\frac{-b}{2a}$.

On dit que z_0 est ***une solution réelle double*** ;

3ème cas : $\Delta<0$. Alors $-\Delta>0$ et l'équation admet deux solutions complexes conjuguées : $z_1=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Démonstration

Les 1er et 2ème cas sont immédiats.

Si $\Delta<0$. Alors $-\Delta>0$. On pose : $\Delta=-(-\Delta)=\left(i\sqrt{-\Delta}\right)^2$.

Donc, l'équation devient $\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2=0$

A l'aide de l'identité remarquable n°3, on obtient :

$$\left(z+\frac{b}{2a}+\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(z+\frac{b}{2a}-\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)=0$$

et d'après le théorème du produit nul, nous obtenons :

$$z+\frac{b}{2a}+\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}=0 \quad \text{ou} \quad z+\frac{b}{2a}-\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}=0$$

Ce qui donne : $$z=\frac{-b}{2a}-\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad z=\frac{-b}{2a}+\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

ou encore : $$z=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad z=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Conclusion : Si $\Delta<0$, alors l'équation admet deux solutions complexes conjuguées : $z_1=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ CQFD.

Exemples.

Résoudre les équations suivantes dans l'ensemble des nombres complexes :

(E_1) : $z^2-4z+4=0$ (E_2) : $z^2-4z+3=0$ (E_3) : $z^2+z+1=0$.

- Pour l'équation (E_1) : $z^2-4z+4=0$, on calcule le discriminant :

$\Delta_1=(-4)^2-4\times1\times4=16-16=0$. $\Delta_1=0$ donc, l'équation (E_1) admet ***une solution réelle double*** $z_0=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-(-4)}{2\times1}=2$. S = {2}.

- Pour l'équation (E_2) : $z^2-4z+3=0$, on calcule le discriminant :

$\Delta_2=(-4)^2-4\times1\times3=16-12=4$. $\Delta_2=4>0$ donc, l'équation (E_2) admet ***deux solutions réelles*** $z_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{4-\sqrt{4}}{2\times1}=1$ et $z_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{4+\sqrt{4}}{2\times1}=3$. S = {1;3}

- Pour l'équation (E_2) : $z^2+2z+5=0$, on calcule le discriminant :

$\Delta_3=2^2-4\times1\times5=4-20=-16$. $\Delta_2=-16<0$ donc, l'équation (E_3) admet deux solutions complexes conjuguées :

$z_1=\dfrac{-b-i\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-2-i\sqrt{16}}{2\times1}=-1-2i$ et $z_2=\dfrac{-b+i\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-2+i\sqrt{16}}{2\times1}=-1+2i$

Conclusion. S = {$-1-2i$; $-1+2i$ }.

IV. Représentation géométrique

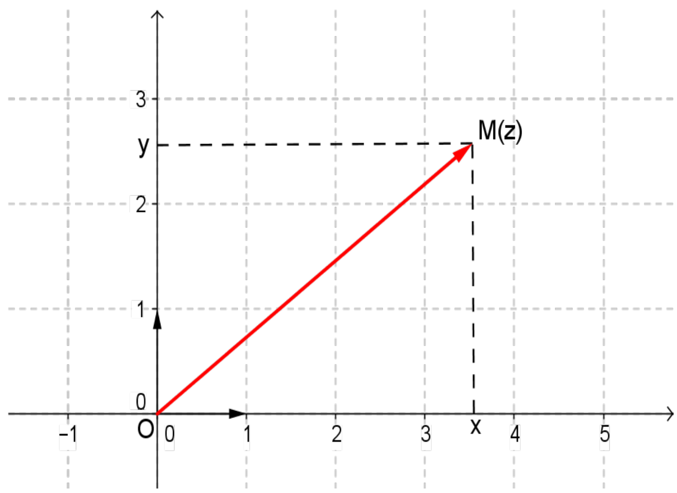
4.1) Représentation géométrique d'un nombre complexe

Le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$. On rappelle que le repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$ est dit ***direct*** si et seulement si $(\vec{u};\vec{v})=+\dfrac{\pi}{2}$.

Définition 7.

- A tout point $M(x\,;y)$ du plan on associe le nombre complexe $\boldsymbol{z=x+i\,y}$.
  z s'appelle ***l'affixe*** du point M.

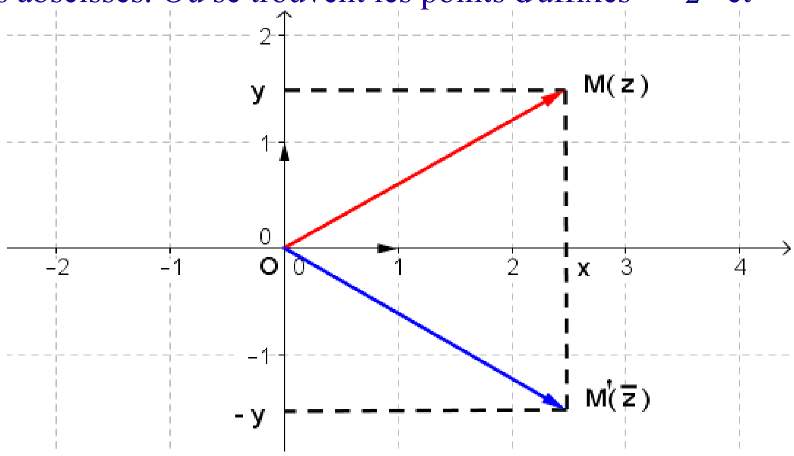
- A tout nombre complexe $\boldsymbol{z=x+i\,y}$, on associe le point M de coordonnées $(x\,;y)$ du plan. M s'appelle ***l'image*** du nombre complexe $\boldsymbol{z}$.



L'***axe des abscisses*** représente l'ensemble des ***nombres réels*** et l'***axe des ordonnées*** représente l'ensemble des ***imaginaires purs***.

Le plan, muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ dans lequel les points sont représentés par des nombres complexes s'appelle ***le plan complexe***.

Exemple. Les points M d'affixe $z=x+iy$ et M' d'affixe $\overline{z}=x-iy$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. Où se trouvent les points d'affixes $-z$ et $-\overline{z}$?



4.2) Affixe d'un vecteur

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$.

Définition 8.

Comme pour les points, à tout vecteur $\vec{V}$ de coordonnées $(a\,,b)$, on associe le nombre complexe $z = a + i\,b$. z s'appelle ***l'affixe*** du vecteur $\vec{V}$
En particulier si A et B sont deux points d'affixes z_A et z_B respectivement, alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe : $z_B - z_A$.

En effet, si $A(x_A\,;y_A)$ et $A(x_A\,;y_A)$ dans le repère $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$, alors on a : $z_A=x_A+iy_A$ et $z_B=x_B+iy_B$.
Mais alors les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(x_B-x_A\,;y_B-y_A)$,
donc l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est égale à : $z_{\overrightarrow{AB}}=(x_B-x_A)+i(y_B-y_A)=z_B-z_A$.

On peut ainsi transposer toutes les propriétés sur les coordonnées des vecteurs avec les nombres complexes. Par exemple :

Théorème 9.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$. Alors :

- Si $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont deux vecteurs d'affixes $z_{\vec{U}}$ et $z_{\vec{V}}$, alors les deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont ***colinéaires*** si et **si et seulement si,** il existe un nombre réel $\boldsymbol{k}$ tel que $\vec{U}=k\,\vec{V}$ **si et seulement si,** il existe un *nombre réel* $\boldsymbol{k}$ tel que $z_{\vec{U}}=k\,z_{\vec{V}}$.

- Si les points A, B, C et D ont pour affixes z_A , z_B , z_C et z_D alors ABCD est un ***parallélogramme*** (ssi) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ (ssi) $z_B-z_A=z_C-z_D$
- Si les points A et B ont pour affixes z_A et z_B , alors ***le milieu M*** du segment [AB] a pour affixe $z_M=\frac{z_A+z_B}{2}$.

Immédiat.

4.3) Norme d'un vecteur

Le plan complexe est muni d'un **repère orthonormé** $(O;\vec{u};\vec{v})$.

Définition 1.

Soit ***M*** un point ***d'affixe z = a + ib***, du plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$, alors ***la norme du vecteur*** $\overrightarrow{OM}$ s'appelle ***le module de z*** et se note |*z*|.
En posant *z* = *a* + *ib*, on a alors :

$$|z|=\|\overrightarrow{OM}\|\in\mathbb{R}^+ \quad \text{et} \quad |z|=\sqrt{a^2+b^2}$$

Conséquence :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

Si les points *A* et *B* ont pour affixes z_A et z_B respectivement, alors la longueur *AB* du segment [*AB*] est égale à la norme du vecteur et est égale au ***module*** de l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$. On retrouve les formules vues au collège :

$$\boxed{AB=\|\overrightarrow{AB}\|=|z_B-z_A|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}}$$

Application : Dans le plan complexe muni d'un **repère orthonormé** $(O;\vec{u};\vec{v})$.
1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2+z+1=0$. On appellera z_1 et z_2 les deux solutions obtenues.
2°) On appelle A le point d'affixe $z_A=1$, et *B* et *C* les points d'affixes z_1 et z_2 .
a) Calculer *AB*, *AC* et *BC*.
b) En déduire la nature du triangle *ABC*.

A terminer !