# Fonctions exponentielles

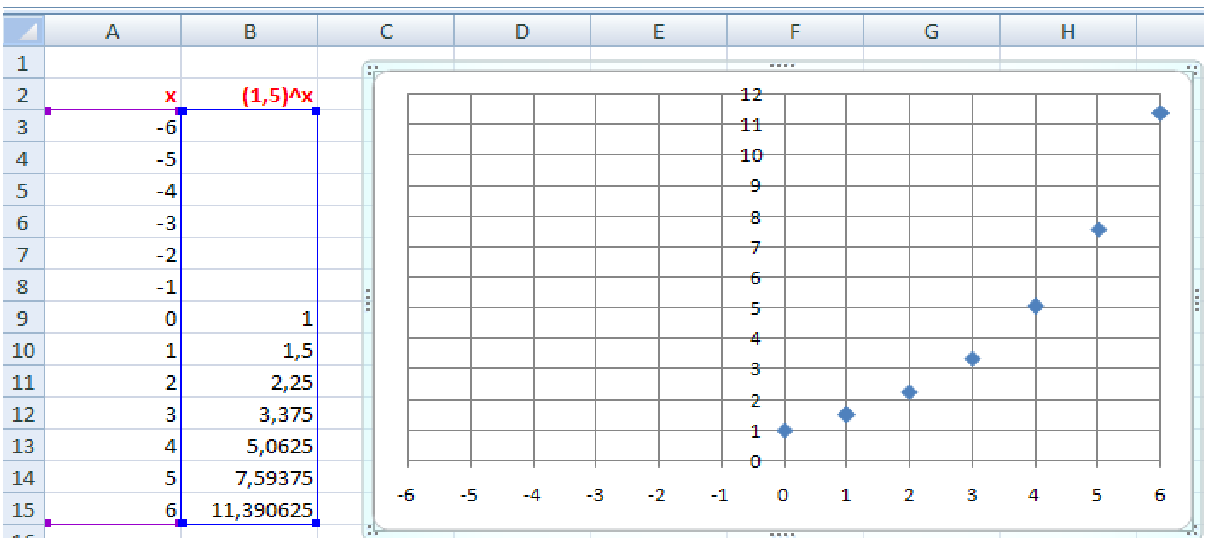
## Ce que dit le programme

| CONTENUS | CAPACITÉS ATTENDUES | COMMENTAIRES |
|---|---|---|
| **Fonction exponentielle** $x \mapsto \exp(x)$ | • Démontrer l'unicité d'une fonction dérivable sur **R**, égale à sa dérivée et qui vaut 1 en 0. | La fonction exponentielle est présentée comme l'unique fonction $f$ dérivable sur **R** telle que : $f'=f$ et $f(0)=1$.<br>L'existence est admise. |
| **Relation fonctionnelle, notation $e^x$.** | • Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ .<br><br>• Utiliser la relation fonctionnelle pour transformer une écriture.<br><br>• Connaître le sens de variation et la représentation graphique de la fonction exponentielle.<br><br>• Connaître et exploiter $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x e^x=0$ . | On étudie des exemples de fonctions de la forme $x \mapsto \exp(u(x))$ , notamment avec $u(x)=-kx$ ou $u(x)=-kx^2$ ( $k>0$ ), qui sont utilisées dans des domaines variés.<br><br>On fait le lien entre le nombre dérivé de la fonction exponentielle en 0 et la limite en 0 $\frac{e^x-1}{x}$ .<br><br>• [SPC et SVT] Radioactivité.<br>*AP : Étude de phénomènes d'évolution.* |

# 1. Des suites géométriques aux fonctions exponentielles

## 1.1) Activité préparatoire

On considère la suite géométrique définie pour tout entier $n$ par $v_n = 1{,}5^n$.
A l'aide d'un tableur, nous pouvons représenter le nuage de points de cette suite.

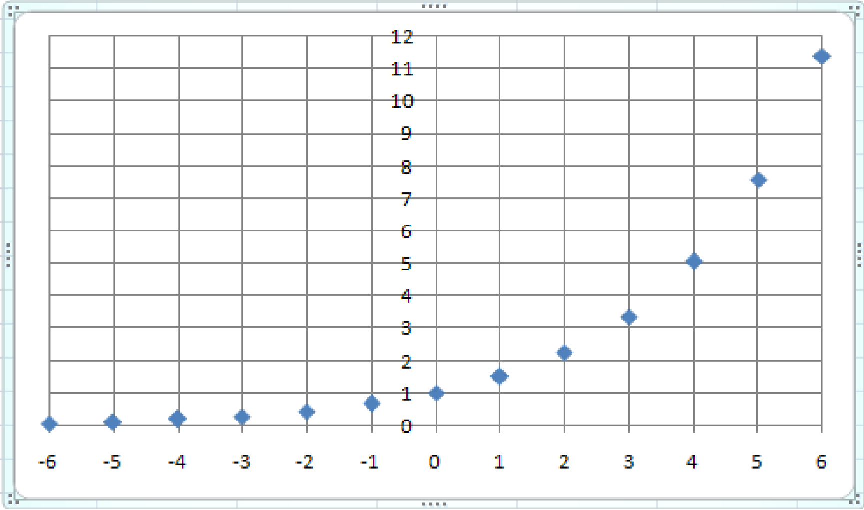


| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | | |
| 2 | x | (1,5)^x |
| 3 | -6 | |
| 4 | -5 | |
| 5 | -4 | |
| 6 | -3 | |
| 7 | -2 | |
| 8 | -1 | |
| 9 | 0 | 1 |
| 10 | 1 | 1,5 |
| 11 | 2 | 2,25 |
| 12 | 3 | 3,375 |
| 13 | 4 | 5,0625 |
| 14 | 5 | 7,59375 |
| 15 | 6 | 11,390625 |



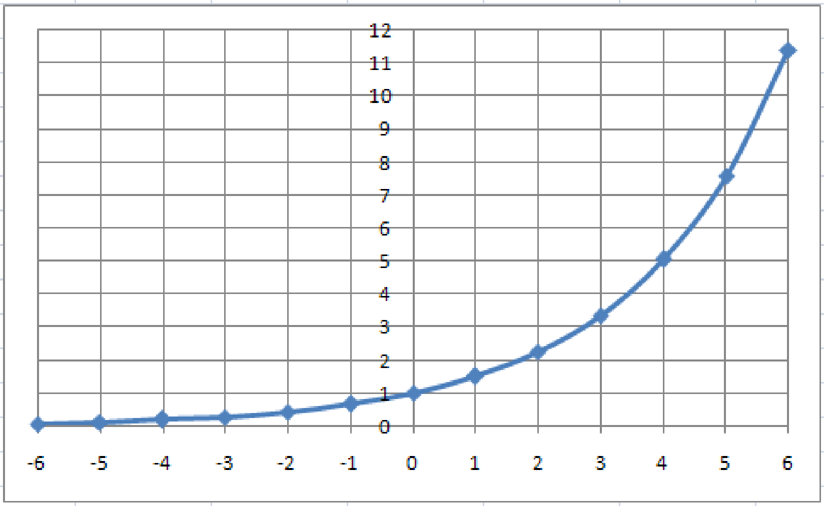
En utilisant les propriétés de la classe de 4ème, nous pouvons aussi calculer les valeurs de «$1{,}5^n$» pour des valeurs négatives de $n$, en utilisant la propriété : $q^{-n}=\frac{1}{q^n}$ .
Donc, on peut étendre ces valeurs pour des ***exposants*** négatifs.

| x | (1,5)^x |
|---|---|
| -6 | 0,0877915 |
| -5 | 0,13168724 |
| -4 | 0,19753086 |
| -3 | 0,2962963 |
| -2 | 0,44444444 |
| -1 | 0,66666667 |
| 0 | 1 |
| 1 | 1,5 |
| 2 | 2,25 |
| 3 | 3,375 |
| 4 | 5,0625 |
| 5 | 7,59375 |
| 6 | 11,390625 |




Si on relie tous ces points par *des segments*, on obtient une ligne brisée, donc une courbe d'une fonction *continue* mais *non dérivable*.
Par contre, si on relie tous ces points par une ligne continue et parfaitement lisse et arrondie, on obtient la courbe d'une fonction *définie, continue et dérivable* sur $\mathbb{R}$.

| x | (1,5)^x |
|---|---|
| -6 | 0,0877915 |
| -5 | 0,13168724 |
| -4 | 0,19753086 |
| -3 | 0,2962963 |
| -2 | 0,44444444 |
| -1 | 0,66666667 |
| 0 | 1 |
| 1 | 1,5 |
| 2 | 2,25 |
| 3 | 3,375 |
| 4 | 5,0625 |
| 5 | 7,59375 |
| 6 | 11,390625 |




Ceci permet de définir une nouvelle fonction $f : x \mapsto f(x) = q^x$. Dans cette fonction, définie sur tout $\mathbb{R}$, *la variable est située dans l'exposant*. On aurait pu l'appeler « *fonction exposantielle* », mais comme en anglais un exposant se dit « *exponent* », les fonctions du type $f : x \mapsto f(x) = q^x$, $q > 0$ et $q \neq 1$, s'appellent des « ***fonctions exponentielles*** ». Nous distinguerons deux cas, comme pour les suites géométriques :

→ Si q > 1, la fonction $f : x \mapsto f(x) = q^x$ sera strictement croissante sur (tout) $\mathbb{R}$.

→ Si 0< q < 1, la fonction $f : x \mapsto f(x) = q^x$ sera strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Ces fonctions conservent les mêmes propriétés calculatoires que les « puissances » vues en classe de 4*ème*. Entre autres : $q^{x+y} = q^x \times q^y$. Ce qui nous facilite la tâche.

## 1.2) Les fonctions exponentielles : $x \mapsto f(x) = q^x$

**Propriété et Définition** : Soit $q$ un nombre réel strictement positif, $q \neq 1$ .
Il existe une unique fonction $f$ définie sur (tout) $\mathbb{R}$ et qui vérifie les trois conditions suivantes :

- La courbe représentative de *$f$ prolonge de façon continue* (d'un seul trait) le *nuage de points de la suite géométrique* $(q^n)$ ;
- La fonction *$f$ est dérivable sur* $\mathbb{R}$ (sa courbe est parfaitement lisse et bien arrondie) ;
- la fonction $f$ satisfait la relation fonctionnelle, c'est-à-dire « *$f$ transforme une somme en un produit* » ; c'est-à-dire que, pour tous nombres réels $x$ et $y$, on a :

$$f(x+y) = f(x) \times f(y)$$

La fonction $f$ s'appelle « *la fonction exponentielle de base $q = f(1)$* ».

## 1.3) Prpriétés

**Propriétés calculatoires**: Soit $q$ un nombre réel strictement positif. Alors, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$

$(P_0)$ : $q^x > 0$ $\qquad$ $(P_1)$ : $q^{x+y} = q^x \times q^y$

$(P_2)$ : $q^{-x} = \dfrac{1}{q^x}$ $\qquad$ $(P_3)$ : $q^{x-y} = \dfrac{q^x}{q^y}$

$(P_4)$ : $\left(q^x\right)^n = q^{nx}$ $\qquad$ $(P_5)$ : $\left(q^x\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{q^x} = q^{\frac{x}{2}}$

Un cas particulier de la propriété $(P_5)$ peut s'écrire encore (pour $x = 1$) :

$$(P_{5bis}) : \text{pour tout } q > 0 : \quad q^{\frac{1}{2}} = \sqrt{q}$$

**Exemples** :

1°) Pour calculer à la calculatrice, on utilise la touche ^ :

$1{,}7^{2,3}$ = 1,7 ^ 2,3 = 3,3887 ; $1{,}7^{-2,3} = 0{,}295099$ et $2^{\pi} = 8{,}82498$.

2°) Écrire avec sous la forme $q^x$ : $a = \dfrac{2^{3,5} \times 2^{-4}}{4^{-2,5}}$ et $b = \sqrt{3} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^{2,7} \times 3^{1,3}$

$$a = \frac{2^{3,5} \times 2^{-4}}{4^{-2,5}} = \frac{2^{3,5-4}}{\left(2^2\right)^{-2,5}} = \frac{2^{-0,5}}{2^{-5}} = 2^{-0,5+5} \quad \text{donc} \quad \boxed{a = 2^{4,5}}$$

$$b = 3^{0,5} \times 3^{-2,7} \times 3^{1,3} = 3^{0,5-2,7+1,3} \quad \text{donc} \quad \boxed{b = 3^{-0,9}}$$

## 1.4) Sens de variation

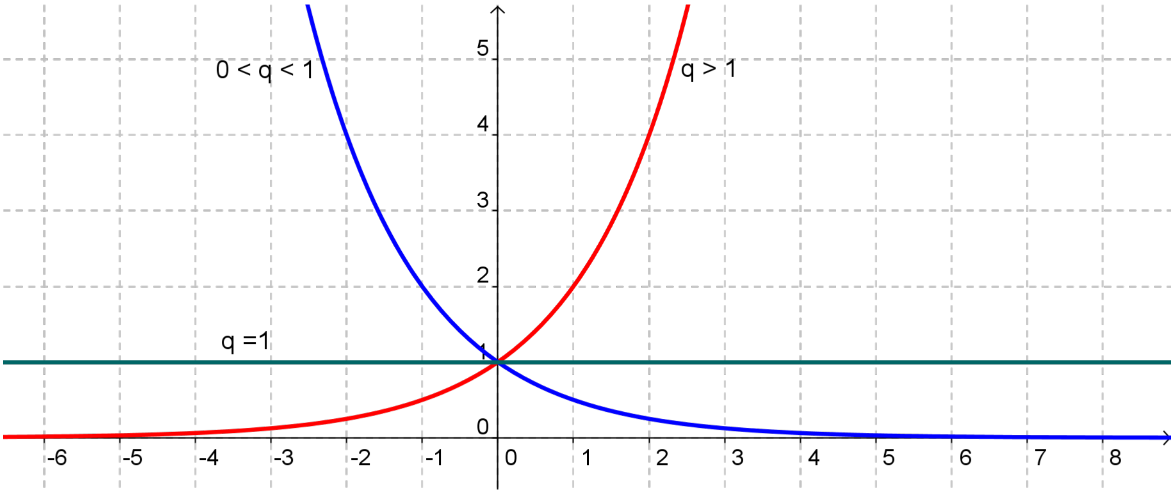
**Propriétés** : Soit $q$ un nombre réel strictement positif. Alors, la fonction $f : x \mapsto q^x$ admet le même sens de variation que la suite géométrique $(q^n)$ :

1°) Si $q > 1$, alors $f$ est ***strictement croissante*** sur $\mathbb{R}$

2°) Si $0 < q < 1$, alors $f$ est ***strictement décroissante*** sur $\mathbb{R}$

3°) Si $q = 1$, alors $f$ est ***constante et égale à 1*** sur $\mathbb{R}$ .

On obtient les courbes suivantes :




Par lecture graphique, nous pouvons déduire les propriétés suivantes :

**Conséquences**:

1°) Soit $q$ un nombre réel strictement positif et différent de 1. Alors, pour tous nombres réels a et b, on a l'équivalence :

| (P$_6$) | $q^a = q^b$ si et seulement si $a = b$ |
|---|---|

2°) Si $\boldsymbol{q > 1}$, alors, la fonction $f : x \mapsto q^x$ est strictement croissante.

Donc, pour tous nombres réels a et b, on a :

| (P$_7$) | $a < b$ si et seulement si $q^a < q^b$ |
|---|---|

3°) Si $\boldsymbol{0 < q < 1}$, alors, la fonction $f : x \mapsto q^x$ est strictement décroissante.

Donc, pour tous nombres réels a et b, on a :

| (P$_{7bis}$) | $a < b$ si et seulement si $q^a > q^b$ |
|---|---|

Ces propriétés nous permettent de résoudre des équations et des inéquations.

**Exemples** :

1°) Résoudre l'équation : $2^{3x+2} - 1 = 0$

Cette équation peut s'écrire : $2^{3x+2} = 1$ ou encore : $2^{3x+2} = 2^0$ .

Or, on sait que [ $q^a = q^b$ si et seulement si $a = b$ ] d'après la propriété P$_6$. Donc

$2^{3x+2} = 2^0$ est équivalente à $3x + 2 = 0$ . Donc $x = \dfrac{-2}{3}$ .

**Conclusion** : Cette équation admet une seule solution et on a : $S = \left\{\dfrac{-2}{3}\right\}$ .

2°) Résoudre l'inéquation : $2^{3x+2} - 1 = 0$

Cette inéquation peut s'écrire : $2^{3x+2} \geqslant 1$ ou encore : $2^{3x+2} \geqslant 2^0$ . Or, pour $q = 2$, la fonction $f : x \mapsto q^x$ est strictement croissante. Donc [ $a > b$ ssi $q^a > q^b$ ] d'après la propriété P$_7$. Donc

$2^{3x+2} \geqslant 2^0$ est équivalente à $3x + 2 \geqslant 0$ . Donc $x \geqslant \dfrac{-2}{3}$ .

**Conclusion** : Cette inéquation admet pour solutions : $S = \left[\dfrac{-2}{3}, +\infty\right[$ .

**Remarque** : Parmi toutes ces fonctions exponentielles, il en existe ***une seule dont la dérivée en 0 est égale à 1***. On l'appelle LA fonction exponentielle. Sa base est $e = f(1) \approx 2{,}71828....$

C'est ce qu'on va découvrir au paragraphe suivant.

# 2. La fonction exponentielle

## 2.1) La fonction exponentielle : $x \mapsto \exp(x) = e^x$

**Théorème1 et définition** : Il ***existe*** une ***unique*** fonction $f$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
Cette fonction s'appelle « ***LA*** » ***fonction exponentielle*** et se note **exp**.

**Démonstration (ROC)**

- L'***existence*** de la fonction *exponentielle* est admise.
- Montrons que cette fonction est ***unique***.

Supposons donc qu'il existe deux fonctions $f$ et $g$ satisfaisant les conditions du théorème. C'est-à-dire $f$ et $g$ sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que $f' = f$ ; $f(0) = 1$ et $g' = g$ ; $g(0) = 1$.

Montrons que $f = g$.
Nous allons faire cette démonstration en deux étapes.

***1ère étape*** : Montrons d'abord que : pour tout $x \in \mathbb{R}$ : $g(x) \neq 0$.
On utilise une *fonction auxiliaire*.
Soit $h$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = g(x)g(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ .
Les fonctions $g$ et $u$: $x \mapsto u(x) = -x$ étant dérivables, la fonction $h$ est dérivable comme composée de fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$h'(x) = g'(x) \times g(-x) + g(x) \times (-1) \times g'(-x).$$

Or, par hypothèse, $g' = g$, donc $h'(x) = g(x)g(-x) - g(x)g(-x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ . Ce qui montre que la fonction $h$ est *constante*.

Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$ : $h(x) = h(0) = g(0)g(0) = 1$.

Ce qui prouve que : pour tout $x \in \mathbb{R}$ : $g(x)\, g(-x) = 1$ (*).

Ceci suffit à démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ : $g(x) \neq 0$ ; car s'il existe un un réel $x_0$ tel que $g(x_0) = 0$, alors le produit $g(x_0)\, g(-x_0) = 0$. Ce qui est absurde, puisque cela contredit le résultat (*).

**Conclusion 1**: pour tout $x \in \mathbb{R}$ : $g(x) \neq 0$.
*Cette démonstration prouve également que pour tout* $x \in \mathbb{R}$ : $f(x) \neq 0$ .

***2ème étape*** : Montrons que la fonction $\dfrac{f}{g}$ est constante.

On utilise encore une *fonction auxiliaire*. La fonction $k : x \mapsto k(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ est composée de fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ , $g(x) \neq 0$ (le dénominateur ne s'annule pas). Donc, la fonction quotient $k$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$k'(x)=\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

Or, par hypothèse, on sait que : $f' = f$ et $g' = g$. Par suite, on a :

$$k'(x)=\frac{f(x)g(x)-f(x)g(x)}{(g(x))^2}=0$$

Ce qui prouve la fonction $k$ est constante sur $\mathbb{R}$. Donc il existe un réel $C$ tel que, pour tout $x\in\mathbb{R}$ : $k(x)=C$.

Mais on sait aussi, par hypothèse, que $f(0)=1$ et $g(0)=1$. Donc, pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a : $k(x)=k(0)=\frac{f(0)}{g(0)}=1$. Donc la constante $C = 1$.

**Conclusion 2** : Pour tout $x\in\mathbb{R}$ $f(x)=g(x)$. Donc : $\boldsymbol{f=g}$.

**Conclusion** : La fonction exponentielle est ***unique***.

CQFD.

## 2.2) Propriétés de la fonction exponentielle

**Théorème : Propriétés fonctionnelles :**

1°) La fonction exp est strictement positive. Pour tout $x\in\mathbb{R}$ : $\exp(x) > 0$.

2°) La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3°) La fonction exp satisfait ***la relation fonctionnelle***, « ***elle transforme une somme en un produit*** » ; c'est-à-dire que, pour tous nombres réels $x$ et $y$, on a :

$$\exp(x+y)=\exp(x)\times\exp(y)$$

**Démonstrations (ROC).**

1°) La fonction exponentielle étant définie et continue sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$ : $\exp(x)\neq 0$, elle garde un signe constant sur $\mathbb{R}$. Donc, elle est positive sur $\mathbb{R}$, puisque $\exp(0) = 1 > 0$.

En effet, supposons qu'il existe un $x_0\in\mathbb{R}$ tel que $\exp(x_0)<0$. Mais alors, en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires sur $[x_0 ; 0]$ (ou sur $[0 ; x_0]$), on démontre qu'il existe un réel $c$ dans $]x_0 ; 0[$ (ou dans $]0 ; x_0[$), tel que $\exp(c) = 0$. Ce qui est absurde. D'où le résultat.

2°) On sait que la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$ : $\exp'(x)=\exp(x)>0$. *La dérivée est strictement positive* sur $\mathbb{R}$ donc la fonction exponentielle est *strictement croissante* sur $\mathbb{R}$. D'où le résultat.

3°) Montrons que La fonction exp *satisfait la relation fonctionnelle*.

On utilise encore une fois *une fonction auxiliaire*. Pour tout nombre réel fixé y, on définit une fonction $g$ sur $\mathbb{R}$ par : $x\mapsto g(x)=\exp(x+y)\times\exp(-x)$.

La fonction $g$ est composée de fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, donc $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$ :

$$g'(x)=\exp'(x+y)\times\exp(-x)+\exp(x+y)\times(-1)\times\exp'(-x)$$

Par définition de la fonction exponentielle, on sait que exp' = exp. Donc, après simplification, on a :

$$g'(x)=\exp(x+y)\exp(-x)-\exp(x+y)\exp(-x)=0$$

Par conséquent, la fonction $g$ est *constante* sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$ : $g(x)=g(0)=\exp(y)\times\exp(0)=\exp(y)$. Donc $g(x)=\exp(y)$.

Ce qui donne pour tout $x\in\mathbb{R}$ : $\exp(x+y)\exp(-x)=\exp(y)$ (1)
En particulier pour y = 0, on obtient : $\exp(x)\exp(-x)=\exp(0)=1$.

Et puisque $\exp(x)\neq 0$, on obtient pour tout $x\in\mathbb{R}$ : $\exp(-x)=\dfrac{1}{\exp(x)}$ (2)

En réinjectant l'égalité (2) dans (1), on obtient :

$$\exp(x+y)\times\frac{1}{\exp(x)}=\exp(y)$$

**Conclusion** : pour tous $x,y\in\mathbb{R}$ : $\exp(x+y)=\exp(x)\times\exp(y)$ CQFD.

## 2.3) Propriétés algébriques de la fonction exponentielle

Propriétés calculatoires: pour tous $x,y\in\mathbb{R}$ et tout $n\in\mathbb{N}$

($P_0$) : $\exp(x)>0$ ($P_1$) : $\exp(x+y)=\exp(x)\times\exp(y)$

($P_2$) : $\exp(-x)=\dfrac{1}{\exp(x)}$ ($P_3$) : $\exp(x-y)=\dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$

($P_4$) : $(\exp(x))^n=\exp(nx)$ ($P_5$) : $(\exp(x))^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\exp(x)}=\exp\left(\dfrac{x}{2}\right)$

Les démonstrations sont assez faciles en utilisant la relation fonctionnelle et les propriétés déjà démontrées. Voir cahier d'exercices.

## 2.4) La notation $e^x$

La fonction exponentielle possède exactement les mêmes propriétés algébriques que les fonctions puissances (vues en 4ème). De plus, l'image de 1 par la fonction exponentielle se note **e** = exp(1) ≈ **2,71828**... Désormais, la fonction exponentielle sera notée : $\exp(x) = \mathbf{e}^x$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ .

Le nombre **e** (comme le nombre $\pi$ ) est un *nombre réel irrationnel* qui admet une écriture illimitée et désordonnée...

## 2.5) Prpriétés algébriques avec la notation $e^x$

Propriétés calculatoires: pour tous $x,y\in\mathbb{R}$ et tout $n\in\mathbb{N}$

($P_0$) : $e^x>0$ ($P_1$) : $e^{x+y}=e^x\times e^y$ ($P_2$) : $e^{-x}=\dfrac{1}{e^x}$

($P_3$) : $e^{x-y}=\dfrac{e^x}{e^y}$ ($P_4$) : $(e^x)^n=e^{nx}$ ($P_5$) : $(e^x)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e^x}=e^{\frac{x}{2}}$

Un cas particulier de la propriété ($P_5$) peut s'écrire encore (pour $x$ = 1) :

($P_{5bis}$) : puisque $e>0$: $e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

**Exemples de calculs** :

A la calculatrice, on utilise la touche **$e^x$** ou la combinaison de touches 2nde **ln** sur **TI** et **Casio** : $e^{2,3} = 9,97418...$ ; $e^{-1,3} = 0,27253...$ et $e = e^1 = 2,718281828459...$

On obtient le nombre **e**, en utilisant la touche **$e^x$** avec $x = 1$ ou, *pour certaines calculatrices*, **e** s'obtient directement par une combinaison de touches 2nde : .

Calculer une valeur approchée de $A = \dfrac{e+1}{\sqrt{e}}$ .

# 3. Étude de la fonction exponentielle

## 3.1) Dérivée et sens de variations

**Théorème** : La fonction exponentielle est définie et dérivable sur (tout) $\mathbb{R}$ et est ***égale à sa fonction dérivée***. Ce qui donne :

(P$_6$) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $(e^x)' = e^x$ .

Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$ : $e^x > 0$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ : $(e^x)' > 0$ .

La fonction dérivée est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc, la fonction exponentielle est strictement croissante sur tout $\mathbb{R}$ . D'où le tableau de variations de la fonction exponentielle :

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $(e^x)'$ | | $+$ | |
| $e^x$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |

+

**Remarque** :

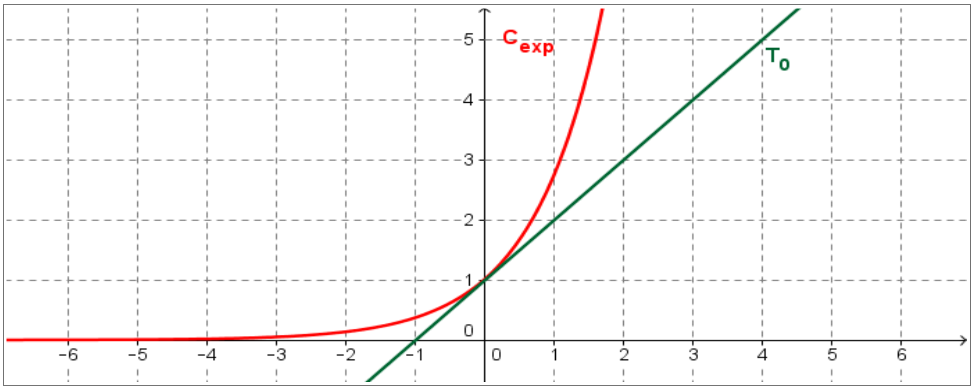
Pour le calcul des limites, on peut déjà faire une *comparaison intuitive* avec les suites géométriques :

- $e = 2,71828... > 1$ donc la suite géométrique $(e^n)$ tend vers $+\infty$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$
  Par comparaison : $\lim\limits_{n \to +\infty} e^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ .
- $e^{-1} = \dfrac{1}{e^1} \approx 0,367879.... < 1$ , donc $e^{-n} = \dfrac{1}{e^n} = \left(\dfrac{1}{e}\right)^n$ , donc la suite géométrique $(e^{-n})$ tend vers 0 lorsque $n$ tend vers $+\infty$ .. Par comparaison : $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{-n} = 0$
  donc $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ .

Nous verrons ci-dessous les démonstrations rigoureuses de ces limites.

**Application** : Pour déterminer l'équation de la droite tangente à la courbe en 0, on calcule : $\exp(0) = e^0 = 1$ et $\exp'(0) = e^0 = 1$. Alors, par définition, l'équation de la droite tangente $T_0$ est : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$ . Ce qui donne : $y = 1(x - 0) + 1$.
Par conséquent : $\boldsymbol{y = x + 1}$.

Illustration graphique




### 3.2) Dérivée d'une fonction composée $x \mapsto e^{u(x)}$

**Théorème** : Soit u une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors, la fonction $e^u$ : $x \mapsto e^{u(x)}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$(P_7) \text{ Pour tout } x \in \mathbb{R} : \left(e^{u(x)}\right)' = u'(x) \times e^{u(x)} .$$

### 3.3) Conséquences : Résolution d'équations et d'inéquations

**Propriétés** :
La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc pour tous nombres réels $a$ et $b$, on a l'équivalence :

$$(P_8) \quad e^a = e^b \text{ si et seulement si } a = b$$

2°) La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc pour tous nombres réels $a$ et $b$, on a l'équivalence :

$$(P_9) \quad a < b \text{ si et seulement si } e^a < e^b$$

**Démonstration**.
1°) ( $\Rightarrow$ ) La fonction exp étant continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et prend ses valeurs dans $]0 ; +\infty[$, donc tout nombre réel strictement positif admet exactement un seul antécédent dans $\mathbb{R}$.
Par conséquent, si $X = e^a$ et $X = e^b$, alors X admet deux antécédents. Donc ces deux antécédents sont égaux, donc $a = b$.
( $\Leftarrow$ ) Si $a = b$, alors $e^a = e^b$ car exp est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $]0 ; +\infty[$, donc tout nombre réel admet une seule image.
2°) Propriété immédiate, car la fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
CQFD.

**Remarque** : Ces propriétés servent à résoudre des équations et des inéquations.

**Exemples** : Résoudre : (1) $e^{2x+1} = 1$ ; (2) $e^{x^2+2x} \leqslant e^3$ .
1°) Il n' y a pas de valeurs interdites pour l'équation (1). Donc le domaine de définition de l'équation (1) est $\mathbb{R}$. On a alors :

$$e^{2x+1} = 1 \text{ équivaut à } e^{2x+1} = e^0 \text{ équivaut à } 2x+1 = 0 \text{ équivaut à } x = \frac{-1}{2} .$$

**Conclusion 1**. Cette équation admet une seule solution. Donc : $S = \left\{\frac{-1}{2}\right\}$ .

2°) Il n' y a pas de valeurs interdites pour l'inéquation (2). Donc le domaine de définition de l'inéquation (2) est $\mathbb{R}$ . La fonction exponentielle étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$ , on a :

$e^{x^2+2x} \leqslant e^3$ équivaut à $x^2+2x \leqslant 3$ équivaut à $x^2+2x-3 \leqslant 0$ (2bis)

Ces deux inéquations étant équivalentes, elles ont les mêmes solutions.
On calcule le discriminant, puis on détermine les racines du trinôme. Ici, $x_1=1$ et $x_2=-3$. Or un trinôme du second degré est du signe de « *a* » à l'extérieur des racines. Donc $x^2+2x-3 \leqslant 0$ équivaut à $-3 \leqslant x \leqslant 1$ .

**Conclusion** : L'ensemble des solutions de cette inéquation est : $S=[-3\,;1]$ .

# 4. Calcul des limites

## 4.1) Limites graphiques

Ce sont les limites de la fonction aux bord de son domaine de définition et qu'on peut « lire » directement sur le graphique :

| |
|---|
| **Théorème 1** : ($L_1$) : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et ($L_2$) : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ . |

Démonstration (ROC).

($L_1$) Limite en $+\infty$ .

Nous allons utiliser le théorème de comparaison et procédons encore en deux étapes :
1ère étape : montrer que : pour tout $x \in \mathbb{R}$ : $e^x > x$ ; autrement dit, $e^x - x > 0$ .
2ème étape : en déduire la limite cherchée par comparaison.

Pour cela, nous allons utiliser *une fonction auxiliaire*. [Méthode *très classique*].

***1ère étape*** : Soit *g* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=e^x-x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ .
*g* est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ : $g'(x)=e^x-1$. De plus :

$$g'(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad e^x-1=0 \quad \Leftrightarrow \quad e^x=1 \quad \Leftrightarrow \quad e^x=e^0 \quad \Leftrightarrow \quad x=0$$

(*d'après la propriété $P_8$ ou*) car la fonction exp est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ , donc 1 ne peut avoir qu'un seul antécédent 0.

D'autre part, la fonction exp étant strictement croissante, on a :

$$g'(x) \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^x-1 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^x \geqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad e^x \geqslant e^0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant 0 \; .$$

Par suite $g'(x)<0 \quad \Leftrightarrow \quad x<0$ . La fonction g est strictement décroissante sur ] $-\infty$ ; 0] et strictement croissante sur [0 ; $+\infty$ [.
On obtient alors le tableau de variations suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | – | 0 | + | |
| $g(x)$ | | ↘ | 1 | ↗ | |

D'après ce tableau de variations, g a un minimum et pour tout $x \in \mathbb{R}$ : $g(x) \geqslant 1$ .

On peut donc affirmer que : pour tout $x \in \mathbb{R}$ : $g(x) > 0$ ou que $e^x - x > 0$

**Conclusion 1**. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $e^x > x$ .

***2ème étape*** : On sait que $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$ et Pour tout $x \in \mathbb{R}$ : $e^x > x$ d'après l'inégalité ci-dessus. Donc, en appliquant le théorème de comparaison, on obtient :

$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ CQFD.

(L$_2$) Limite en $-\infty$

Il suffit de remarquer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ : $e^x = \frac{1}{e^{-x}}$ et utiliser le résultat précédent.

Nous allons effectuer un *changement de variable*. On pose $X = -x$ donc $x = -X$

On a, d'une part : $x \to -\infty \Leftrightarrow X \to +\infty$ . Et d'autre part, $e^x = \frac{1}{e^{-x}} = \frac{1}{e^X}$ .

On a alors : $\lim_{x \to -\infty} X = +\infty$ et $\lim_{X \to +\infty} e^X = +\infty$ , donc par composition des limites,

on a $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ CQFD.

### 4.2) Limites de croissances comparées

Ce sont les limites qui permettent de « comparer » la fonction exponentielle aux fonctions puissances, en particulier, la fonction $x \mapsto y = x$ ; et lever certaines indéterminations [*ce qui est toujours le cas dans les exercices*].

**Théorème 2**: (L$_3$) : $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et (L$_4$) : $\lim_{x \to -\infty} x e^x = 0$ .

Démonstration.

(L$_3$) Limite en $+\infty$ .

Là encore, nous allons utiliser le théorème de comparaison et procédons encore en deux étapes :

1ère étape. Montrer que : pour tout $x > 0$ ,

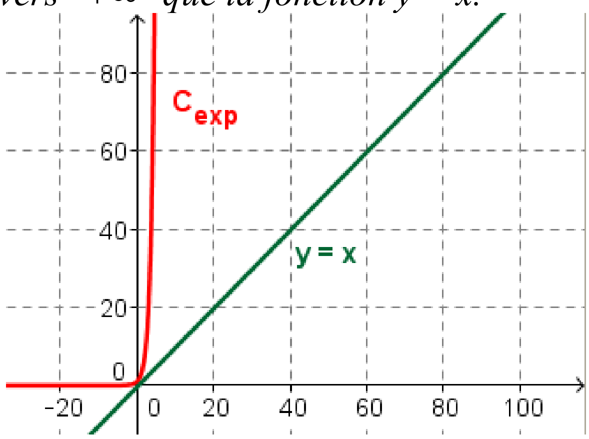
$\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$ ; autrement dit : $e^x > \frac{x^2}{2}$ ou

encore $e^x - \frac{x^2}{2} > 0$

2ème étape. En déduire la limite cherchée par comparaison.

Traçons les 2 courbes de $y = e^x$ et $y = x$, dans un repère « assez grand ».

*La fonction exp croît **plus rapidement** vers $+\infty$ que la fonction $y = x$.*




Pour cela, nous allons utiliser *une fonction auxiliaire*.

***1ère étape*** : Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ .

$g$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ : $g'(x) = e^x - x.$ . Pour connaître le signe de g', on refait le même procédé. On calcule sa dérivée $(g')' = g''$.
$g''(x) = e^x - 1.$ De plus :

$$g''(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^x - 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^x > 1 \quad \Leftrightarrow \quad e^x > e^0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 0 \ .$$

Comme la fonction $g''$ est positive sur $]0 \ ; \ +\infty \ [$, on peut en déduire que la fonction g' est strictement croissante sur $]0 \ ; \ +\infty \ [$. De plus $g'(0) = 1.$
On obtient alors le tableau de variations suivant de $g'$ :

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $g''(x)$ | $+$ | |
| $g'(x)$ | $1$ ↗ | |

D'après ce tableau de variations, $g'$ a un minimum et pour tout $x > 0$ : $g'(x) \geqslant 1$ .
Ce qui nous permet d'affirmer que : pour tout $x > 0$ : $g'(x) > 0$ . On peut donc en déduire que la fonction g est strictement croissante sur $]0 \ ; \ +\infty \ [$. De plus $g(0) = 1.$
On obtient alors le tableau de variations suivant de la fonction $g$ :

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $g'(x)$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $1$ ↗ | |

D'après ce tableau de variations, $g$ a un minimum et pour tout $x > 0$ : $g(x) \geqslant 1$ .
Ce qui nous permet d'affirmer que : pour tout $x > 0$ : $g(x) > 0$ .

**<u>Conclusion 1</u>**. Pour tout $x > 0$ : $e^x - \dfrac{x^2}{2} > 0$ ou encore : $\dfrac{e^x}{x} > \dfrac{x}{2}$ .

***<u>2ème étape</u>*** : On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{2} = +\infty$ et pour tout $x > 0$ : $\dfrac{e^x}{x} > \dfrac{x}{2}$ d'après l'inégalité ci-dessus. Donc, en appliquant le théorème de comparaison, on obtient :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

CQFD.

(L4) Limite en $-\infty$

Il suffit de remarquer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ : $e^x = \dfrac{1}{e^{-x}}$ et utiliser le résultat précédent.
On effectue un *<u>changement de variable</u>*. On pose $X = -x$ donc $x = -X$ . On a,
d'une part : $x \to -\infty \Leftrightarrow X \to +\infty$ . Et d'autre part, $xe^x = -(-x) \times \dfrac{1}{e^{-x}} = -\dfrac{X}{e^X} = \dfrac{-1}{\left(\dfrac{e^X}{X}\right)}$ .

On a alors : $\lim\limits_{x \to -\infty} X = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty$ , donc par composition des limites,

on a $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ CQFD.

### 4.2) Lien entre limites et nombre dérivé

On fait le lien entre le nombre dérivé de la fonction exponentielle en 0 et la limite en 0 de l'expression $\frac{e^x-1}{x}$ .

**Théorème 3** : ($L_5$) : $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}=1$

Démonstration.

($L_5$) Limite en 0.

Pour cette limite, la fonction auxiliaire utilisée sera la fonction exponentielle elle même. Soit $h$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x)=e^x$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ .
$h$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$ : $h'(x)=h(x)=e^x$ .

Le taux d'accroissement de $h$ en 0 est donné par : $\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=\frac{e^x-1}{x}$ .

Or, la limite lorsque $x$ tend vers 0, du taux d'accroissement de $h$ en 0 est égale au nombre dérivé de $h$ en 0. Donc :

$\lim_{x\to} \frac{h(x)-h(0)}{x-0}=h'(0)=e^0=1$. Donc $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ . CQFD.

## 5. Étude de cas particuliers de fonctions $e^{u(x)}$

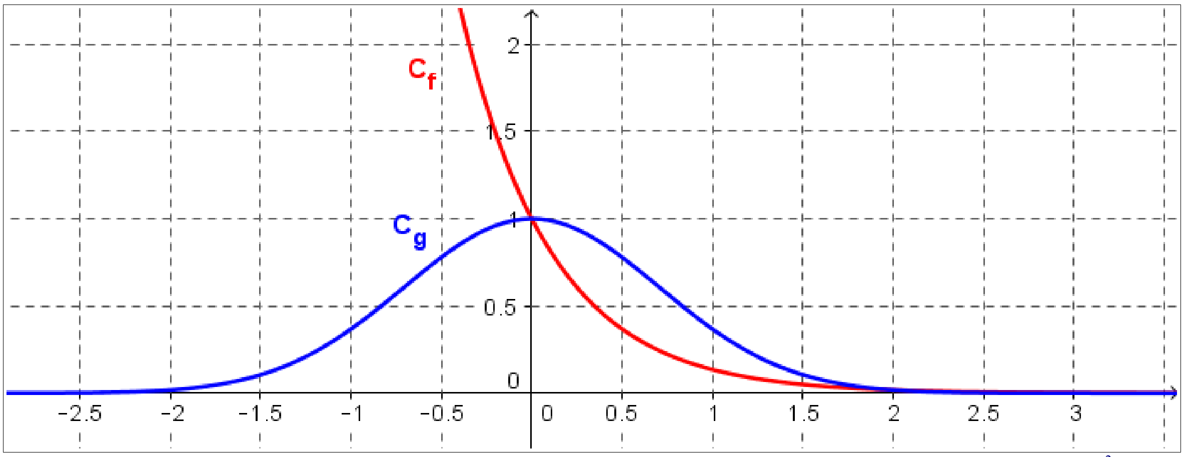
Dans plusieurs applications, nous rencontrons des fonctions composées de la forme $e^{-kx}$ ou $e^{-kx^2}$ , $k>0$, notamment en probabilités et statistiques. D'où une étude particulière de ces types de fonctions.

1°) La fonction définie par $u(x)=-kx$ , $k>0$, est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x)=-k$.
Donc, la fonction composée $f: x\mapsto e^{-kx}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée :

$$\left(e^{-kx}\right)'=-k\times e^{-kx} \text{ pour tout } x\in\mathbb{R}$$

$k>0$, donc $-k<0$. Et comme $e^{-kx}>0$, cette dérivée est négative pour tout $x\in\mathbb{R}$ .
Ce qui montre que cette fonction $f$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ .
De plus $f(0)=1$. D'où le tableau de variations :

| $x$ | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | 1 | 0 |




Courbes des fonctions définies sur ℝ par : $f(x)=e^{-2x}$ et $g(x)=e^{-x^2}$

2°) La fonction définie par : $u(x)=-kx^2$ , $k>0$, est dérivable sur ℝ et $u'(x)=-2kx$. Donc, la fonction composée $g : x \mapsto e^{-kx^2}$ est dérivable sur ℝ et a pour dérivée :

$$\boxed{\left(e^{-kx^2}\right)'=-2kx\times e^{-kx^2} \text{ pour tout } x\in\mathbb{R}}$$

$k>0$, donc $-2k<0$. Et comme $e^{-kx}>0$, le signe de la dérivée est l'opposé du signe de $x$, pour tout $x\in\mathbb{R}$ . Ce qui montre que cette fonction $f$ est strictement croissante sur $]-\infty\ ;0]$ et strictement décroissante sur $[0\ ;+\infty[$. De plus $g(0)=1$.
D'où le tableau de variations :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ |

Remarque : La fonction $g$ est ***paire***, donc sa courbe représentative $C_g$ est ***symétrique par rapport à l'axe des ordonnées***.

**Exemples** :

Calculer les dérivées des fonctions suivantes : $f(x)=e^{-3x}$ et $g(x)=e^{\frac{-x^2}{2}}$
Les deux fonctions f et g sont définies et dérivables sur ℝ et pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a :

$$f'(x)=u'(x)\times e^{u(x)}=-3\times e^{-3x}=-3e^{-3x}$$

et $$g'(x)=u'(x)\times e^{u(x)}=-\frac{1}{2}\times 2x\times e^{\frac{-x^2}{2}}=-xe^{\frac{-x^2}{2}}$$