Limites des Suites numériques

Ce que dit le programme :

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Limite finie ou infinie d'une suite.	Dans le cas d'une limite infinie, étant donnés une suite croissante (u_n) et un nombre réel A, déterminer à l'aide d'un algorithme un rang à partir duquel u_n est supérieur à A.	Pour exprimer que (u_n) tend vers l quand n tend vers $+\infty$, on dit que : « tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang ». Pour exprimer que (u_n) tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, on dit que : « tout intervalle de la forme $]A, +\infty[$ contient toutes les valeurs (u_n) à partir d'un certain rang ». Comme en classe de première, il est important de varier les approches et les outils sur lesquels le raisonnement s'appuie. On présente des exemples de suites qui n'ont pas de limite.
Limites et comparaison.	Démontrer que si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que : - u_n est inférieur ou égal à v_n à partir d'un certain rang ; - u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$; alors v_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.	On démontre que si une suite est croissante et admet pour limite l, alors tous les termes de la suite sont inférieurs ou égaux à l. Le théorème dit « des gendarmes » est admis.
Opérations sur les limites. Comportement à l'infini de la suite (q^n), q étant un nombre réel. Suite majorée, minorée, bornée.	Étudier la limite d'une somme, d'un produit ou d'un quotient de deux suites. Démontrer que la suite (q^n), avec $q>1$, a pour limite $+\infty$. Déterminer la limite éventuelle d'une suite géométrique. Utiliser le théorème de convergence des suites croissantes majorées.	On démontre par récurrence que pour a réel strictement positif et tout entier naturel n : $(1+a)^n \geq 1+na$. On peut étudier des situations où intervient la limite de la somme des premiers termes d'une suite géométrique. Ce théorème est admis. Il est intéressant de démontrer qu'une suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$. Des exemples de suites récurrentes, en particulier arithmético-géométriques, sont traités en exercice. *[Cf FicheBAC01]* Des activités algorithmiques sont menées dans ce cadre.

I. Limite finie ou infinie d'une suite

1.1) Limite finie d'une suite

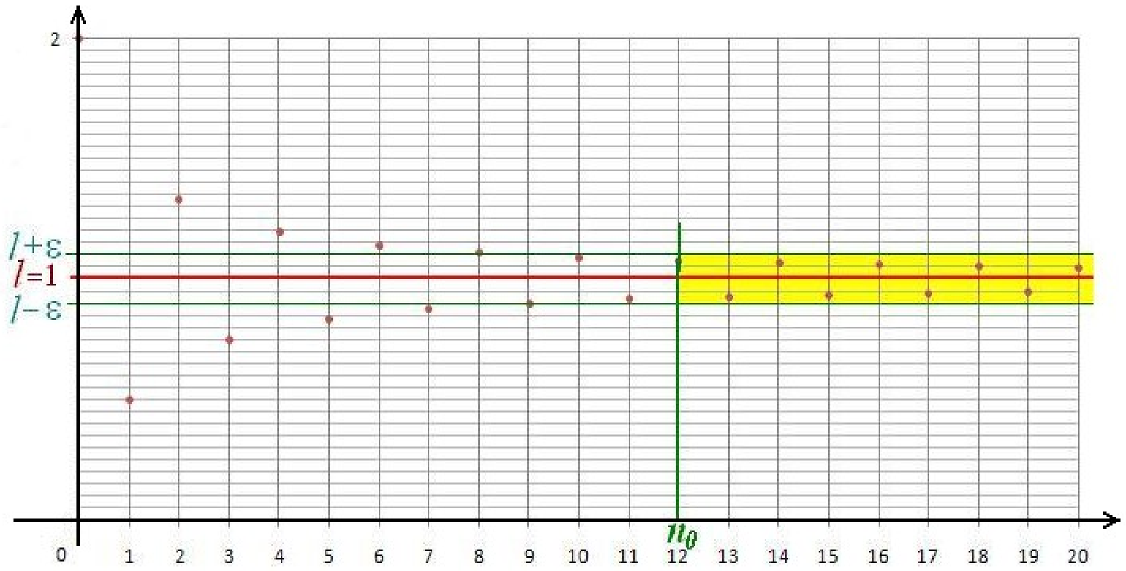
Définition 1. : Soit l un nombre réel donné.
On dit que la suite (u_n) tend vers l quand n tend vers $+\infty$ lorsque : « tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang ». On écrit alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

Autrement dit :

Définition 2. : Soit l un nombre réel donné.
On dit que la suite (u_n) tend vers l quand n tend vers $+\infty$, lorsque : « pour tout nombre réel strictement positif **ε** (aussi petit soit-il) [lire *epsilon*], il existe un rang n_0, à partir duquel, toutes les valeurs de u_n sont proches de l *à* ***ε*** *près* ».

Cette définition peut encore s'écrire : Pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$ (aussi petit soit-il), il existe un entier n_0 tel que : [si $n > n_0$, alors $l-\varepsilon < u_n < l+\varepsilon$].

Illustration graphique : $u_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n+1}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$



Limites de référence : (1) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$; (2) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$ $k > 0$ et (3) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$

1.2) Limite infinie d'une suite

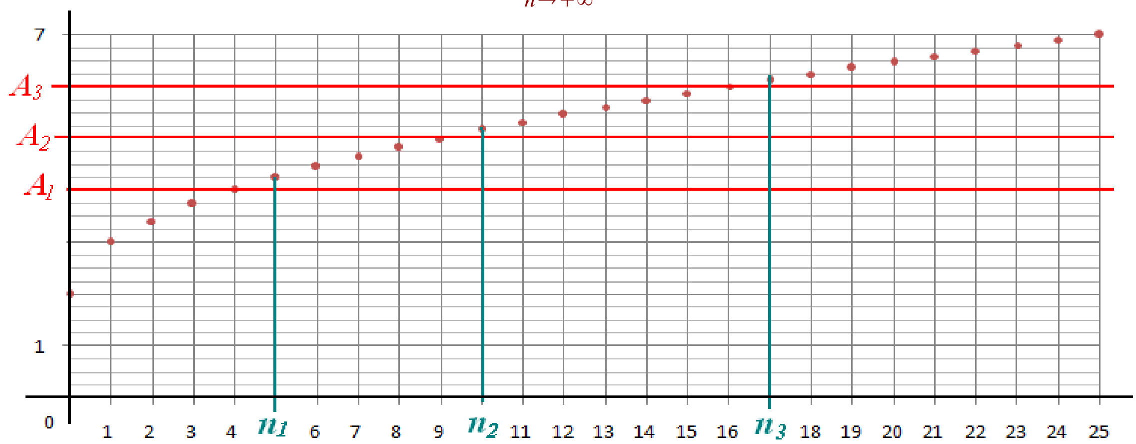
Définition 1. :
On dit que la suite (u_n) tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, lorsque : « tout intervalle ouvert de la forme]A ; $+\infty$ [, contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang ». On écrit alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Autrement dit :

Définition 2. :
On dit que la suite (u_n) tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, lorsque : « pour tout nombre réel strictement positif A (aussi grand soit-il) il existe un rang n_0, à partir duquel, toutes les valeurs de u_n sont *supérieures à* A ».

Cette définition peut aussi s'écrire : Pour tout nombre réel $A > 0$ (aussi grand soit-il), il existe un entier n_0 tel que [si $n > n_0$, alors $u_n > A$].

Illustration graphique : $u_n = \sqrt{n} + 2$, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$



Limites de référence :

(1) $\lim_{n\to+\infty} n=+\infty$; (2) $\lim_{n\to+\infty} n^k=+\infty$ $k>0$ et (3) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}=+\infty$

D'une manière analogue, nous pouvons écrire une définition de la limite d'une suite qui tend vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$:

Définition 3. :
On dit que la suite (u_n) tend vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$, lorsque : « tout intervalle ouvert de la forme] $-\infty$;A [, contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang ». On écrit alors $\lim_{n\to+\infty} u_n=-\infty$.

Autrement dit :

Définition 2. :
On dit que la suite (u_n) tend vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$, lorsque : « pour tout nombre réel strictement négatif A, il existe un rang n_0, à partir duquel, toutes les valeurs de u_n sont *inférieures à* A ».

Cette définition peut encore s'écrire : Pour tout nombre réel $A<0$, il existe un entier n_0 tel que [si $n>n_0$, alors $u_n<A$].

Exemple : $u_n=-2n^2+3$, $\lim_{n\to+\infty} u_n=-\infty$

1.3) Limites des suites arithmétiques et géométriques

Propriété 1. : Soit (u_n) une suite arithmétique de premier ***terme u_0*** et de ***raison r***.
Donc, pour tout $n\in\mathbb{N}$ $u_n=rn+u_0$ (fonction affine de coefficient directeur r).
Alors :

- Si $r>0$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.
- Si $r<0$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n=-\infty$.
- Si $r=0$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n=u_0$ (la suite est constante).

Propriété 2. : Soit (v_n) une suite géométrique de premier ***terme v_0 >0*** et de ***raison q***.
Donc, pour tout $n\in\mathbb{N}$ $v_n=v_0q^n$. Alors :

- Si $q>1$, alors $\lim_{n\to+\infty} v_n=+\infty$ (***v_0 >0***) et $\lim_{n\to+\infty} v_n=-\infty$ (***v_0 <0***)
- Si $-1<q<1$, alors $\lim_{n\to+\infty} v_n=0$.
- Si $q=1$, alors $\lim_{n\to+\infty} v_n=v_0$ (la suite est constante).
- Si $q\leqslant-1$, alors $\lim_{n\to+\infty} v_n$ n'existe pas

[Suite alternée dont les termes augmentent indéfiniment en valeur absolue].

Exemples : 1°) $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{-2}{3}\right)^n=0$ et 2°) $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{3}\right)^n=+\infty$.

ALGORITMIQUE : Dans le cas d'une limite infinie (2°), étant donnés une suite croissante (u_n) et un nombre réel A, déterminer à l'aide d'un algorithme un rang à partir duquel u_n est supérieur à A.

1.4) Suites convergentes, suites divergentes

Définition : On dit qu'une suite (u_n) est ***convergente*** si et seulement si elle admet une *limite finie* $l\in\mathbb{R}$. On dit aussi que la suite ***converge*** vers l lorsque n tend vers l'infini.

Une suite qui n'est pas convergente est dite ***divergente***. Autrement dit, une suite est dite divergente si et seulement si elle admet *une limite infinie* ou si elle n'admet *pas de limite*.

Exemples : – Toute suite arithmétique non constante est divergente.

- La suite de terme général $v_n=2\times\left(\frac{3}{5}\right)^n$, est convergente vers 0.

  (v_n) est une suite géométrique de raison $q=\frac{3}{5}\in]0;1[$.
- La suite de terme général $t_n=(-1)^n$ est divergente. C'est une suite qui prend alternativement les valeurs 1 et – 1. Donc elle ne tend pas vers l'infini et ne peut pas converger vers une valeur finie.
  Essayez de montrer que (t_n) n'admet *pas de limite finie* à partir de la définition.

II. Opérations sur les limites

Les résultats de certaines opérations sur les limites sont intuitives et ***parfaitement déterminées***. D'autres opérations mènent à des « ***formes indéterminées*** » (indiquées par ***F.I.***), c'est-à-dire qu'elles conduisent à plusieurs résultats possibles, donc qui ne sont ***pas parfaitement déterminées***. Il faudra alors user de différentes méthodes et techniques pour ***transformer l'écriture*** de la suite et « ***lever l'indétermination*** ». Notamment, *factoriser une somme*, *développer un produit*, séparer une fraction en plusieurs parties, ou multiplier le numérateur et le dénominateur par la *quantité conjuguée*.

Nous pouvons résumer les opérations sur les limites des suites dans les quatre tableaux suivants :

2.1) Addition et soustraction

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels. Le tableau suivant donne la limite de la suite (u_n+ v_n) si elle existe : [avec la règle $\lim_{n\to+\infty}-v_n=-\lim_{n\to+\infty}v_n$ pour la soustraction]

$\lim_{n\to+\infty} u_n = \rightarrow$ $\lim_{n\to+\infty} v_n = \downarrow$	l	$-\infty$	$+\infty$
l'	$l+l'$	$-\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	*F.I.*
$+\infty$	$+\infty$	*F.I.*	$+\infty$

Exemples :

1°) Calculer $\lim_{n\to+\infty} 3n^2+\sqrt{n}-7=?$

Aucun problème. On a : $\lim_{n\to+\infty} 3n^2=+\infty$, $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}=+\infty$ et -7 est une constante.

Conclusion : $\lim_{n\to+\infty} 3n^2+\sqrt{n}-7=+\infty$

2°) Calculer $\lim_{n\to+\infty} 2n^2-3n+5=?$

D'après ce qui précède, on sait que : $\lim_{n\to+\infty} 2n^2=+\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} -3n=-\infty$. Nous avons donc une ***F.I.*** Il faut ***transformer l'écriture*** de la suite pour ***lever l'indétermination***. La méthode consiste à « ***mettre en facteur le monôme de plus haut degré*** ».

On a alors : $2n^2-3n+5=2n^2\left(1-\frac{3n}{2n^2}+\frac{5}{2n^2}\right)=2n^2\left(1-\frac{3}{2n}+\frac{5}{2n^2}\right)$

Or, $\lim_{n\to+\infty}\frac{-3}{2n}=0$ et $\lim_{n\to+\infty}\frac{5}{2n^2}=0$ donc $\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{3}{2n}+\frac{5}{2n^2}\right)=1$

De plus $\lim_{n\to+\infty} 2n^2=+\infty$, par multiplication des limites (voir ci-dessous), on obtient :

$\lim_{n\to+\infty} 2n^2-3n+5=+\infty$ CQFD.

2.2) Multiplication

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels. Le tableau suivant donne la limite de la suite $(u_n v_n)$ lorsqu'elle existe :

$\lim_{n\to+\infty} u_n = \rightarrow$ $\lim_{n\to+\infty} v_n = \downarrow$	$l\neq 0$	0	$-\infty$	$+\infty$
$l'\neq 0$	$l\,l'$	0	$+\infty$ si $l'<0$ $-\infty$ si $l'>0$	$-\infty$ si $l'<0$ $+\infty$ si $l'>0$
0	0	0	*F.I.*	*F.I.*
$-\infty$	$-\infty$	*F.I.*	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	*F.I.*	$-\infty$	$+\infty$

Exemples :

1°) Calculer $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}(3n^2-7)=?$

Aucun problème. $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}=+\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} 3n^2-7=+\infty$

Conclusion : $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}(3n^2-7)=+\infty$

2°) Calculer $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}(5n^2+1)=?$

On sait que : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}=0$ et $\lim_{n\to+\infty} (5n^2+1)=+\infty$. Nous avons donc une *F.I.* Il faut transformer l'écriture de la suite pour lever l'indétermination. Pour cela « ***on développe l'expression de la suite*** ».

On a alors : $\frac{1}{n}(5n^2+1)=\frac{5n^2}{n}+\frac{1}{n}=5n+\frac{1}{n}$

Or, $\lim_{n\to+\infty} 5n=+\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}=0$ donc $\lim_{n\to+\infty} 5n+\frac{1}{n}=+\infty$

Conclusion : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}(5n^2+1)=+\infty$

2.3) Inverse

Soit (v_n) une suite de nombres réels. Le tableau suivant donne la limite de la suite $(1/v_n)$ lorsqu'elle existe :

$\lim_{n\to+\infty} u_n$	$l\neq 0$	**0** et $u_n<0$ à partir d'un certain rang on note **0^-**	**0** et $u_n>0$ à partir d'un certain rang on note **0^+**	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n}$	$\frac{1}{l}$	$-\infty$	$+\infty$	0	0

Exemple : 1°) Calculer $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+7}=?$ Aucun problème.

Comme $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}+7=+\infty$ on a : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+7}=0$.

2.3) Quotient

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels. On suppose que les termes de la suite (v_n) sont non nuls à partir d'un certain rang.

Le tableau suivant donne la limite de la suite-quotient $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ lorsqu'elle existe :

$\lim_{n\to+\infty} u_n$ / $\lim_{n\to+\infty} v_n$	$l \neq 0$	**0** et $u_n < 0$ à partir d'un certain rang on note $\mathbf{0^-}$	**0** et $u_n > 0$ à partir d'un certain rang on note $\mathbf{0^+}$	$-\infty$	$+\infty$
$l' \neq 0$	$\dfrac{l}{l'}$	0	0	$-\infty$ si $l' > 0$ $+\infty$ si $l' < 0$	$-\infty$ si $l' < 0$ $+\infty$ si $l' > 0$
$\mathbf{0^-}$	$-\infty$ si $l > 0$ $+\infty$ *si* $l < 0$	*F.I.*	*F.I.*	$+\infty$	$-\infty$
$\mathbf{0^+}$	$-\infty$ si $l < 0$ $+\infty$ *si* $l > 0$	*F.I.*	*F.I.*	$-\infty$	$+\infty$
$-\infty$	0	0	0	*F.I.*	*F.I.*
$+\infty$	0	0	0	*F.I.*	*F.I.*

<u>**Exemples**</u> : 1°) Calculer $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{0{,}6^{n+1}}{0{,}2^n} = ?$

Comme $\lim_{n\to+\infty} 0{,}6^{n+1} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} 0{,}2^n = 0$. Nous avons donc une *F.I.* du type 0/0.
Il faut donc transformer l'écriture de la suite quotient pour lever l'indétermination.

Mais alors : $\dfrac{0{,}6^{n+1}}{0{,}2^n} = 0{,}6 \times \dfrac{0{,}6^n}{0{,}2^n} = 0{,}6 \times \left(\dfrac{0{,}6}{0{,}2}\right)^n = 0{,}6 \times 3^n$

La suite-quotient est une suite géométrique de premier terme 0,6 > 0 et de raison $q=3$.
Comme q > 1 et le premier terme est strictement positif, on a : $\lim_{n\to+\infty} 0{,}6 \times 3^n = +\infty$.

<u>Conclusion</u> : . $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{0{,}6^{n+1}}{0{,}2^n} = +\infty$

2°) Calculer $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{5n^2-3}{n^2+n+1}$.

Il est clair que $\lim_{n\to+\infty} [5n^2-3] = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} [n^2+n+1] = +\infty$.

Nous avons donc une *F.I.* du type $+\infty / +\infty$. Il faut transformer l'écriture de la suite pour « *lever l'indétermination* ». Pour cela, « ***on met en facteur le monôme de plus haut degré au numérateur et au dénominateur*** ». On écrit :

$$5n^2-3 = 5n^2\left(1-\frac{3}{5n^2}\right) \quad \text{et} \quad n^2+n+1 = n^2\left(1+\frac{n}{n^2}+\frac{1}{n^2}\right) = n^2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$$

Par suite, nous pouvons écrire :

$$v_n = \frac{5n^2-3}{n^2+n+1} = \frac{5n^2\left(1-\frac{3}{5n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{5\left(1-\frac{3}{5n^2}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}$$

On simplifie par n^2 . Chaque parenthèse au numérateur et au dénominateur tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini (voir ci-dessus). Par conséquent, la suite (v_n) tend vers 2.

Conclusion : $\lim_{n\to+\infty} v_n = 5$.

III. Limites et comparaison

3.1) Théorèmes de comparaison

Théorème 1. : Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels convergentes et ayant pour limites l et l' respectivement. S'il existe un rang n_0, tel que :
pour tout entier $n \geqslant n_0$: $u_n \leqslant v_n$, alors $l \leqslant l'$.

Un ***corollaire*** est une conséquence immédiate du théorème qui le précède.

Corollaire : Soient (u_n) une suite convergente vers une limite l et majorée par un nombre M. Alors $l \leqslant M$.

Il suffit d'appliquer le théorème 1 avec $v_n = M$.

Théorème 2. : Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels vérifiant les deux conditions :

- Il existe un rang n_0, tel que : pour tout entier $n \geqslant n_0$: $u_n \leqslant v_n$,
- et la suite (u_n) tend vers $+\infty$;

Alors, la suite (v_n) tend vers $+\infty$.

Théorème 2bis. : Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels vérifiant les deux conditions :

- Il existe un rang n_0, tel que : pour tout entier $n \geqslant n_0$: $u_n \leqslant v_n$,
- et la suite (v_n) tend vers $-\infty$;

Alors, la suite (u_n) tend vers $-\infty$.

Nous avons un troisième théorème de comparaison très important, appelé très souvent « ***le théorème des gendarmes*** » :

Théorème 3. : Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites de nombres réels vérifiant les conditions :
- Il existe un rang n_0, tel que : pour tout entier $n \geqslant n_0$: $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$,
- et les deux suites (u_n) et (w_n) sont convergentes et tendent vers la même limite l ,
Alors, la suite (v_n) est aussi convergente et tend vers cette même limite l.

Exemple : Déterminer la limite de la suite définie par : $v_n = \frac{2n\sin(5n^2)}{n^2+1}$

On sait que pour tout nombre réel x : $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$.
Donc, pour tout entier n : $-1 \leqslant \sin(5n^2) \leqslant 1$.

D'autre part, pour tout entier n : $\frac{2n}{n^2+1}>0$. En multipliant les trois membres de l'inégalité précédente par ce nombre, on obtient : $\frac{-2n}{n^2+1}\leqslant\frac{2n\sin(5n^2)}{n^2+1}\leqslant\frac{2n}{n^2+1}$.

Or les deux suites définies par $u_n=\frac{-2n}{n^2+1}$ et $w_n=\frac{2n}{n^2+1}$ sont convergentes et tendent toutes les deux vers la même limite 0. Donc, d'après le théorème de comparaison (théorème des gendarmes), (v_n) est convergente et tend vers cette même limite 0.

Conclusion : $\lim_{n\to+\infty} v_n=0$

3.2) Théorèmes de la convergence monotone

Théorème 4.:
Soit (u_n) une suite de nombres réels. Alors
- Si (u_n) est strictement croissante et majorée, alors (u_n) est convergente.
- Si (u_n) est strictement décroissante et minorée, alors (u_n) est convergente.

Théorème 4bis.:
Soit (u_n) une suite de nombres réels. Alors
- Si (u_n) est strictement croissante et ***non majorée***, alors (u_n) tend vers $+\infty$.
- Si (u_n) est strictement décroissante et ***non minorée***, alors (u_n) tend vers $-\infty$.

Exemple :
On considère la suite définie par : $u_0=0$ et pour tout entier n : $u_{n+1}=\sqrt{3u_n+4}$

1°) A l'aide de votre calculatrice, calculer les quatre premiers termes de cette suite.
2°) Démontrer par récurrence, que pour tout entier n, $0\leqslant u_n\leqslant 4$
3°) Démontrer par récurrence, que la suite (u_n) est strictement croissante.
4°) Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

1°) *Calcul des premiers termes :* $u_0=0$; $u_1=2$; $u_2=2,4494...$; $u_3=3,3687...$;...

2°) *Démontrer par récurrence, que pour tout entier n,* $0\leqslant u_n\leqslant 4$

Pour chaque entier n, on appelle P_n la proposition logique:[$0\leqslant u_n\leqslant 4$]
Montrons par récurrence que : Pour tout entier n : [P_n est vraie].

Initialisation
Pour $n = 0$: $u_0=0$ donc : $0\leqslant u_0\leqslant 4$ Donc P_0 est vraie.

Hérédité Soit $n\in\mathbb{N}$
Supposons que P_n est vraie. (Hypothèse de récurrence).
Montrons que P_{n+1} est vraie.
D'après l'hypothèse de récurrence, on sait que : $0\leqslant u_n\leqslant 4$ (HR)
En multipliant par 3 les trois membres, on obtient : $3\times 0\leqslant 3\times u_n\leqslant 3\times 3$
Donc $0\leqslant 3u_n\leqslant 12$. Puis en ajoutant 4 aux trois membres, on obtient :
$0+4\leqslant 3u_n+4\leqslant 12+4$ Ce qui donne : $4\leqslant 3u_n+4\leqslant 16$.
Or, la fonction « racine carrée » est strictement croissante sur $[0,+\infty[$, donc :
$\sqrt{4}\leqslant\sqrt{3u_n+4}\leqslant\sqrt{16}$. Donc $2\leqslant u_{n+1}\leqslant 4$.
Et comme $0\leqslant 2$, on a bien : $0\leqslant u_{n+1}\leqslant 4$
Ce qui montre que P_{n+1} est vraie. Donc la propriété est héréditaire.

Conclusion. Pour tout entier n : $0\leqslant u_n\leqslant 3$

3°) *Démontrer par récurrence, que la suite (u_n) est strictement croissante.*

C'est-à-dire : Pour tout entier n, $u_n < u_{n+1}$.

Pour chaque entier *n*, on appelle P_n la proposition logique:[$u_n < u_{n+1}$].
Montrons par récurrence que : Pour tout entier *n :* [P_n est vraie].

Initialisation
Pour $n = 0$: $u_0 = 0$ et $u_1 = 2$ donc : $u_0 < u_1$. Donc P_0 est vraie.
Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$
Supposons que P_n est vraie. (Hypothèse de récurrence).
Montrons que P_{n+1} est vraie.
D'après l'hypothèse de récurrence, on sait que : $u_n < u_{n+1}$ (HR)
En multipliant par 3 les deux membres, on obtient : $3 \times u_n < 3 \times u_{n+1}$
Puis en ajoutant 3 aux trois membres, on obtient : $3u_n + 4 < 3u_{n+1} + 4$
Or, la fonction « racine carrée » est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, donc :
$3u_n + 4 < 3u_{n+1} + 4$.
Or, la fonction « racine carrée » est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, donc :
$\sqrt{3u_n + 4} < \sqrt{3u_{n+1} + 4}$. Donc $u_{n+1} < u_{n+2}$.
Ce qui montre que P_{n+1} est vraie. Donc la propriété est héréditaire.
Conclusion. Pour tout entier *n* :. $u_n < u_{n+1}$. La suite (u_n) est strictement croissante.

4°) *Démontrer que la suite (u_n) est convergente.*
D'après ce qui précède, la suite (u_n) est strictement *croissante* et *majorée par 3*.
Donc, d'après *le théorème de la convergence monotone*, la suite (u_n) est convergente
et $\lim_{n \to +\infty} u_n \leqslant 3$.