Fiche BAC 09 **_Terminale S_**

Nombres complexes
(2ème partie)

Exercice 1 (Ex n°2 Antilles-Guyane juin 2000 adapté) Commun à tous les candidats

1°) Pour tout nombre complexe z , on pose $P(z)=z^3-3z^2+3z+7$.

a) Calculer $P(-1)$.

b) Déterminer les réels *a* et *b* tels que pour tout nombre complexe *z*, on ait :

$$P(z)=(z+1)(z^2+az+b).$$

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$.

2°) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.
(Unité graphique : 2 cm.) On désigne par *A, B, C* et *G* les points du plan d'affixes respectives $z_A=-1$, $z_B=2+i\sqrt{3}$, $z_C=2-i\sqrt{3}$ et $z_G=3$.

a) Réaliser une figure et placer les points *A, B, C* et *G.*

b) Calculer les distances *AB*, *BC* et *AC*. En déduire la nature du triangle *ABC*.
En déduire que les points *A, B* et *C* appartiennent au cercle Γ de centre *I* d'affixe 1 et de rayon r qu'on déterminera.

c) Calculer un argument du nombre complexe $Z=\dfrac{z_A-z_C}{z_G-z_C}$.

d) En déduire la nature du triangle *GAC,* puis montrer que $G\in\Gamma$.

3°) ***Deuxième méthode du 2°c)*** : On pose $z_1=z_A-z_C$ et $z_2=z_G-z_C$
Écrire z_1 et z_2 sous la forme exponentielle, puis en déduire le module et un argument de Z.

Exercice 2 (n°2 Métropole - juin 2000 adapté) Commun à tous les candidats

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O,\vec{u};\vec{v})$, unité graphique 4 cm, on considère les points *A* d'affixe $z_A=1$ et *B* d'affixe $z_B=2$.

Soit un réel θ appartenant à l'intervalle] 0 ; π [et M le point d'affixe $z=1+e^{2i\theta}$.

1°) Montrer que le point M appartient au cercle (C) de centre A et de rayon 1.

2° a) Exprimer l'angle $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AM})$ en fonction de θ.

b) En déduire l'ensemble E des points M quand θ décrit l'intervalle] 0 ; π [.

3°) Soit *f* la fonction du plan dans lui-même, qui à tout point M du plan, d'affixe *z*, fait correspondre le point M' d'affixe z' tel que $z' = e^{-2i\theta}z$. Montrer que $z'=\bar{z}$ puis que M ′ appartient à (C).

4°) Dans toute la suite, on choisit θ = π /3.

a) Déterminer A ′ l'image de A par *f* .

b) Définir l'image (C′) du cercle (C) par *f* .

c) Placer sur une figure A, B, (C), M, (C′) puis le point M ′ image de M par *f* .

d) Montrer que le triangle AMO est équilatéral.

e) Montrer que (C) et (C′) se coupent en O et en M′ .

f) Soit *P* le symétrique du point *M* par rapport à *A*.
Montrer que M' est le milieu du segment $[A'P]$.

Corrigé

Exercice 1 (Ex n°2 Antilles-Guyane juin 2000 adapté) Commun à tous les candidats

1°a) Calcul de $P(-1)$.

$$P(-1)=(-1)^3-3(-1)^2+3(-1)+7=0 \quad \text{donc} \quad P(-1)=0.$$

b) Déterminer des réels *a* et *b* tels que pour tout complexe *z*, $P(z)=(z+1)(z^2+az+b)$.

$P(-1)=0$ donc –1 est une racine du polynôme P. Donc P se factorise par $(z+1)$.
Méthode : Je développe l'expression de $P(z)$ et j'obtiens :

$$P(z)=z^3-3z^2+3z+7=z^3+(a+1)z^2+(a+b)z+b.$$

Je procède ensuite par identification des coefficients des monômes de même degré :

$$\begin{cases} a+1=-3 \\ a+b=3 \\ b=7 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} a=-4 \\ et \\ b=7 \end{cases}$$

Par conséquent $P(z)=(z+1)(z^2-4z+7)$.

c) Résolution dans $\mathbb{C}$, de l'équation $P(z)=0$.
D'après le théorème du produit nul, nous avons :

$P(z)=0.$ (ssi) $(z+1)(z^2-4z+7)=0$ (ssi) $z+1=0$ ou $z^2-4z+7=0$
(ssi) $z=-1$ ou $z^2-4z+7=0$

Pour la deuxième équation, je calcule le discriminant Δ :
$\Delta=(-4)^2-4\times1\times7=16-28=-12$. Comme $\Delta<0$, il n'y a pas de solution réelle, mais cette équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z=\frac{-(-4)-i\sqrt{12}}{2\times1} \quad \text{ou} \quad z=\frac{-(-4)+i\sqrt{12}}{2\times1}$$

Donc $$z=\frac{4-2i\sqrt{3}}{2} \quad \text{ou} \quad z=\frac{4+2\sqrt{3}}{2}$$

Ou encore : $z=2-i\sqrt{3}$ ou $z=2+i\sqrt{3}$

Conclusion : L'équation $P(z)=0$ admet trois solutions dans $\mathbb{C}$:

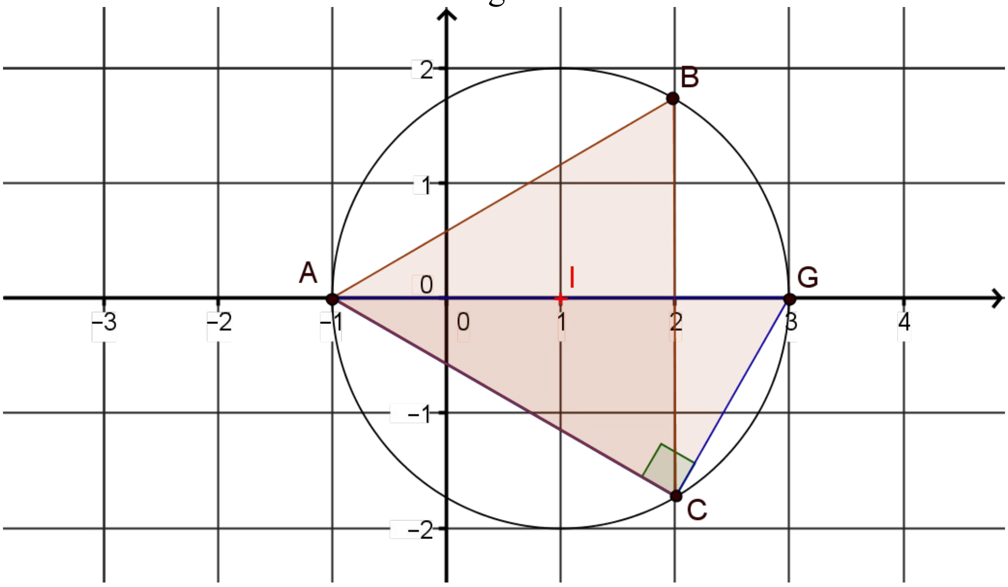
$$z=-1 \ ; \ z=2-i\sqrt{3} \ \text{ et } \ z=2+i\sqrt{3}$$

2° a) On désigne par *A, B, C* et *G* les points du plan d'affixes respectives $z_A=-1$, $z_B=2+i\sqrt{3}$, $z_C=2-i\sqrt{3}$ et $z_G=3$. Réalisation d'une figure (page suivante).

ASTUCES ! Comment construire « les nombre $\sqrt{3}$ & $\sqrt{2}$ » à la règle et au compas ?

- Sur l'axe des abscisses : on utilise $\cos(\pi/6)=\sqrt{3}/2$. On construit **un cercle de rayon 2** et on trace la droite horizontale d'équation $y=1$; elle coupe le cercle au point d'abscisse $x=\sqrt{3}$.
- Sur l'axe des ordonnées : on utilise $\sin(\pi/3)=\sqrt{3}/2$. On construit **un cercle de rayon 2** et on trace la verticale d'équation $x=1$; elle coupe le cercle au point d'ordonnée $y=\sqrt{3}$.
- Même méthode pour le calcul de $\sqrt{2}$: on utilise : $\cos(\pi/4)=\sqrt{2}/2=\sin(\pi/4)$.

Figure



Calculer les distances AB, BC et AC. En déduire la nature du triangle ABC.

On sait que : $AB = |z_B - z_A|$ donc :

$$AB = |z_B - z_A| = |2 + i\sqrt{3} - (-1)| = |3 + i\sqrt{3}| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \ ;$$

$$BC = |z_C - z_B| = |2 - i\sqrt{3} - (2 + i\sqrt{3})| = |-2i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$$

et $$AC = |z_C - z_A| = |2 - i\sqrt{3} - (-1)| = |3 - i\sqrt{3}| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \ ;$$

Nous avons $AB = BC = AC$. Donc, ***le triangle ABC est équilatéral***.

Dire que A appartient au cercle Γ de centre I et de rayon r, signifie que $IA = r$, ou encore que : $|z_A - z_I| = r$. Or $|z_A - z_I| = |-1 - 1| = 2$, donc $r = 2$.

D'autre part : $|z_B - z_I| = |2 + i\sqrt{3} - 1| = |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{4} = 2$ donc $IB = 2$. Donc $B \in \Gamma$.

De même : $|z_C - z_I| = |2 - i\sqrt{3} - 1| = |1 - i\sqrt{3}| = \sqrt{4} = 2$ donc $IC = 2$. Donc $C \in \Gamma$.

2° c) Calculer un argument du nombre complexe $Z = \dfrac{z_A - z_C}{z_G - z_C}$

$$Z = \frac{z_A - z_C}{z_G - z_C} = \frac{-1 - (2 - i\sqrt{3})}{3 - (2 - i\sqrt{3})} \quad \text{donc} \quad Z = \frac{-3 + i\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3}} = \frac{(-3 + i\sqrt{3})(1 - i\sqrt{3})}{(1 + i\sqrt{3})(1 - i\sqrt{3})}$$

Par suite $Z = \dfrac{-3 + 3i\sqrt{3} + i\sqrt{3} + 3}{4} = \dfrac{4i\sqrt{3}}{4}$, puis on simplifie par 4. Par conséquent :

$Z = i\sqrt{3}$. D'autre part, comme Z est ***un imaginaire pur de coefficient positif***, on a :

$$|Z| = \sqrt{3} \quad \text{et} \quad arg(Z) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

Comme $|Z| = \sqrt{3}$ donc $\dfrac{CA}{CG} \neq 1$ et par suite le triangle GAC n'est ni isocèle, ni équilatéral. Et comme $arg(Z) = \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$, on a $(\overrightarrow{CG} ; \overrightarrow{CA}) = \dfrac{+\pi}{2}$.

Conclusion : *Le triangle GAC est rectangle en C*.

De plus $IG=|z_G-z_I|=|3-1|=2$ donc $G\in\Gamma$.

3°) ***Deuxième méthode du 2°c)*** : On pose $z_1=z_A-z_C$ et $z_2=z_G-z_C$

Écrire z_1 et z_2 sous la forme exponentielle, puis en déduire le module et un argument de Z.

$z_1=z_A-z_C=-1-(2-i\sqrt{3})=-3+i\sqrt{3}$

Le module de z_1: $|z_1|=\sqrt{(-3)^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

Un argument de z_1 : je calcule le cosinus et le sinus :

$\begin{cases}\cos\theta_1=\dfrac{x}{\lvert z_1\rvert}=\dfrac{-3}{2\sqrt{3}}=\dfrac{-\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta_1=\dfrac{y}{\lvert z_1\rvert}=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2}\end{cases}$	Je consulte mon cercle trigonométrique et j'obtiens : $\theta_1=\dfrac{5\pi}{6}[2\pi]$. Donc $z_1=2\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}$

De même, on a : $z_2=z_G-z_C=3-(2-i\sqrt{3})=1+i\sqrt{3}$

Le module de z_2 : $|z_2|=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=2$

Un argument de z_2 : je calcule le cosinus et le sinus :

$\begin{cases}\cos\theta_2=\dfrac{x}{\lvert z_2\rvert}=\dfrac{1}{2}\\ \sin\theta_2=\dfrac{y}{\lvert z_2\rvert}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$	Je consulte mon cercle trigonométrique et j'obtiens : $\theta_2=\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$. Donc $z_2=2e^{i\frac{\pi}{3}}$

On pose maintenant $Z=\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{2\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}}{2e^{i\frac{\pi}{3}}}=\sqrt{3}\times e^{i\frac{5\pi}{6}-(i\frac{\pi}{3})}=\sqrt{3}\times e^{i\frac{\pi}{2}}$

Donc : $|Z|=\sqrt{3}$ et $arg(Z)=\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$. CQFD

Exercice 2 (n°2 Métropole - juin 2000 adapté) Commun à tous les candidats

A : $z_A=1$, B : $z_B=2$. Soit $\theta\in]0,\pi[$ et M le point d'affixe $z=1+e^{2i\theta}$.

1°) Montrons que le point M appartient au cercle (C) de centre A et de rayon 1.

Pour démontrer que $M\in(C)$ il faut et il suffit de démontrer que : $AM=1$.

Or $AM=|z_M-z_A|=|1+e^{i2\theta}-1|=|e^{i2\theta}|=1$, car pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$: $|e^{i\alpha}|=1$.

Conclusion. ***On a bien :*** $M\in(C)$

2° a) Exprimons l'angle $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AM})$ en fonction de θ.

D'après la relation de Chasles, on a : $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AM})=(\overrightarrow{AB};\vec{u})+(\vec{u};\overrightarrow{AM})$. Donc $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AM})=-(\vec{u};\overrightarrow{AB})+(\vec{u};\overrightarrow{AM})=(\vec{u};\overrightarrow{AM})-(\vec{u};\overrightarrow{AB})\quad[2\pi]$.

Or, $(\vec{u};\overrightarrow{AM})=arg(z_M-z_A)\quad[2\pi]$ et $(\vec{u};\overrightarrow{AB})=arg(z_B-z_A)\quad[2\pi]$, donc :

$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AM})=arg(z_M-z_A)-arg(z_B-z_A)=arg\left(\dfrac{z_M-z_A}{z_B-z_A}\right)\quad[2\pi]$. Or, on sait que :

$\dfrac{z_M-z_A}{z_B-z_A}=\dfrac{1+e^{i2\theta}-1}{2-1}=\dfrac{e^{i2\theta}}{1}=e^{i2\theta}$. Donc, un argument de $e^{i2\theta}$ est $2\theta\,[2\pi]$.

Conclusion : $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AM})=2\theta\quad[2\pi]$

2° b) En déduire l'ensemble E des points *M* quand θ décrit l'intervalle] 0 ; π [.

On sait que le point M appartient au cercle (C) de centre A et de rayon 1.

A est le centre du cercle (C) et $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AM})=2\theta\quad[2\pi]$. Or, lorsque θ décrit l'intervalle] 0 ; π [, 2θ décrit l'intervalle] 0 ; 2π [. On remarque que les deux extrémités de l'intervalle sont exclues. Ce qui correspond au point B.

Par conséquent, Tous les points du cercle (C), à l'exception du point B, appartiennent à l'ensemble E.

Conclusion : ***E est le cercle (C) privé du point B.***

3°) Soit *f* la fonction du plan dans lui-même, qui à tout point M du plan, d'affixe *z*, fait correspondre le point *M '* d'affixe *z'* tel que $z' = e^{-2i\theta}z$. Montrer que a) $z'=\bar{z}$ puis que b) M ' appartient à (C).

a) Je calcule $\quad z' = e^{-2i\theta}z = e^{-2i\theta}(1 + e^{2i\theta})$

Je développe $\quad z' = e^{-2i\theta} + e^{-2i\theta+2i\theta} = e^{-2i\theta} + 1$

Or, pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$: $\overline{e^{i\alpha}}=e^{-i\alpha}$ donc $z' = \overline{e^{2i\theta}+1}=\bar{z}$

Conclusion : On a bien $z'=\bar{z}$.

b) Pour démontrer que $M'\in(C)$ il faut et il suffit de démontrer que : $AM' = 1$.

Or $AM=|z_{M'}-z_A|=|1+e^{i2\theta}-1|=|e^{i2\theta}|=1$, car pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$: $|e^{i\alpha}|=1$.

Conclusion. On a bien : $M'\in(C)$.

Remarque : (*C*) est un cercle de centre A, point sur l'axe des abscisses. Comme *M '* a pour affixe $z'=\bar{z}$ donc *M '* est le symétrique de *M* par rapport à l'axe des abscisses et ***la symétrie conserve les longueurs***, on pourrait affirmer que :

$$\boxed{AM' = AM = 1}$$

4°. a) Dans toute la suite, on choisit θ = π /3. Déterminer A ' l'image de A par f.

On appelle $z_{A'}$ l'affixe du point A', image de A par la fonction f. Par définition, on a :

$$z_{A'}=e^{-i\frac{2\pi}{3}}z_A=e^{-i\frac{2\pi}{3}}\times 1=\cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{-2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Par conséquent, le point A' a pour coordonnées : $\boxed{A'\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$.

b) Définir l'image (C') du cercle (C) par f.

Soit N un point quelconque du plan et N' son image par la fonction f. Alors :

On sait que : $A'=f(A)$ donc $z_{A'}=e^{-i\frac{2\pi}{3}}z_A$

et $N'=f(N)$ donc $z_{N'}=e^{-i\frac{2\pi}{3}}z_N$

En soustrayant membre à membre, puis en factorisant par $e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ on obtient :

$$z_{N'}-z_{A'}=e^{-i\frac{2\pi}{3}}(z_N-z_A)$$

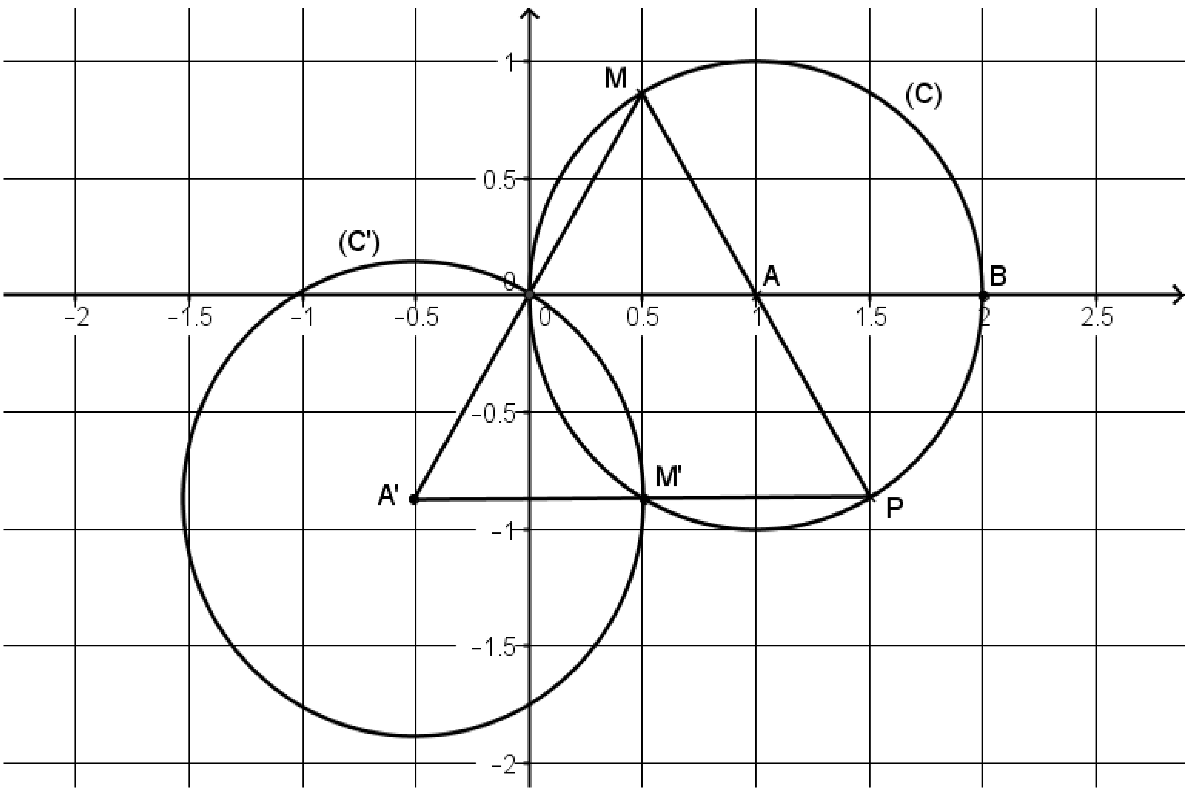
Il s'en suit que : $A'N'=|z_{N'}-z_{A'}|=\left|e^{-i\frac{2\pi}{3}}(z_N-z_A)\right|=\left|e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right|\times|z_N-z_A|=AN.$

Or, si $N\in(C)$, alors $AN=1$, donc $\boldsymbol{A'N'=1}$.

Ce qui signifie que N' appartient au cercle de centre A' et de rayon 1.

Conclusion : ***(C') est le cercle de centre A' et de rayon 1.***

c) Placer sur une figure *A, B, (C), M, (C')* puis le point *M'* image de *M* par f.



On sait que : $z_A = 1$, donc $\boxed{A'(1;0)}$; $z_B = 2$, donc $\boxed{B(2;0)}$ et $\boxed{A'\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$.

De plus : $z_M = e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Donc : $\boxed{M\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$

De même, $z_{M'} = \overline{z_M} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Donc : $\boxed{M'\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$.

Voir figure ci-dessus.

d) Montrer que le triangle AMO est équilatéral.

Nous avons déjà vu que $AM = 1$ et On sait que $OA = 1$.

De plus, le point M a pour affixe $z_M = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ Donc $OM = |z_M - 0| = |z_M| = 1$.

Conclusion : $AM = OA = OM = 1$. Donc le triangle AMO est équilatéral.

e) Montrer que (C) et (C') se coupent en O et en M'.

On sait que $OA' = OA = 1$. Donc le point O appartient à la fois au cercle (C) de centre A et de rayon 1 et au cercle (C') de centre A' et de rayon 1. De même, nous avons déjà vu que $AM = AM' = 1$. De plus :

$$A'M' = |z_{M'} - z_{A'}| = \left|e^{-i\frac{2\pi}{3}}(z_M - z_A)\right| = \left|e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right| \times |z_M - z_A| = AM = 1.$$

Donc : $AM' = A'M' = 1$. Ce qui montre que le point M' appartient à la fois au cercle (C) et au cercle (C').

Conclusion : ***Les deux cercles (C) et (C') se coupent en deux points O et M'.***

f) Soit P le symétrique du point M par rapport à A. Montrer que M' est le milieu du segment $[A'P]$.

On Cherche d'abord l'affixe z_P du point P.

Par définition, on a les équivalences suivantes :

P est le symétrique du point M par rapport à A (ssi) A est le milieu de $[MP]$

$$\text{(ssi)} \quad \frac{z_M + z_P}{2} = z_A \quad \text{(ssi)} \quad z_M + z_P = 2z_A \quad \text{(ssi)} \quad z_P = 2z_A - z_M$$

$$\text{(ssi)} \quad z_P = 2\times 1 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{(ssi)} \quad \boxed{z_P = \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}} \quad \text{(ssi)} \quad \boxed{P\left(\frac{3}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} .$$

Cherchons maintenant l'affixe du milieu du segment $[A'P]$.

$$\frac{z_{A'} + z_P}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3}) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = z_{M'}$$

Par conséquent : $\frac{z_{A'} + z_P}{2} = z_{M'}$.

Conclusion : ***M' est bien le milieu du segment [A' P].*** CQFD.

Remarque :

Pour déterminer les coordonnées de P et démontrer que M' est bien le milieu du segment $[A'P]$, on pourrait ***utiliser le calcul vectoriel avec les coordonnées***.

En effet,

P est le symétrique de M par rapport à A

(ssi) A est le milieu de $[MP]$

(ssi) $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{AP}$

(ssi) $z_P - z_A = z_A - z_M$

(ssi) $z_P = 2z_A - z_M$

(ssi) $z_P = 2\times 1 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

(ssi) $\boxed{z_P = \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}$ (ssi) $\boxed{P\left(\frac{3}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$.

D'autre part :

Montrons maintenant que M' est bien le milieu du segment $[A'P]$.

On calcule les affixes des deux vecteurs : $\overrightarrow{A'M'}$ et $\overrightarrow{M'P}$.

On a alors :

$$z_{\overrightarrow{A'M'}} = z_{M'} - z_{A'} = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = 1$$

et

$$z_{\overrightarrow{M'P}} = z_P - z_{M'} = \left(\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = 1$$

Par conséquent : $\overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{M'P}$

Ce qui signifie que ***M' est bien le milieu du segment $[A'P]$.*** CQFD. OUF !