Théorème des valeurs Intermédiaires (th.v.i.)

Exercice n°1. [RÉSOLU]

On considère la fonction définie par : $f(x)=x^3+x^2-5x+4$

1°) Calculer la dérivée de f ainsi que les limites aux bornes de D_f.
En déduire le le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

2°) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha\in\mathbb{R}$.

3°) Donner un encadrement puis une valeur approchée, arrondie à 10^{-2} près, de α .

4°) Déduire des résultats précédents le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$

Exercice n°1 (Corrigé)

1°) Calcul de la dérivée de f ainsi que les limites aux bornes de D_f.

La fonction f est une fonction polynôme, donc elle est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Et pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=3x^2+2x-5$.

a) Pour connaître le sens de variation de f, on étudie le signe de $f'(x)$.
On résout d'abord l'équation $f'(x)=0$ c'est-à-dire $3x^2+2x-5=0$ avec $a = 3$; $b = 2$ et $c = –5$.

On calcule le discriminant : $\Delta=b^2-4ac=2^2-4\times3\times(-5)=4+60=64$
$\Delta>0$, donc cette équation admet deux solutions :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2-\sqrt{64}}{6}=\frac{-10}{6}=\frac{-5}{3} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2+\sqrt{64}}{6}=\frac{6}{6}=1$$

On en déduit le signe de $f'(x)$. Pour cela, nous avons 2 méthodes :

1ère méthode : on récite le théorème du cours de 1ère S :
«*On sait que qu'un trinôme du second degré est toujours du signe de "a" à l'extérieur des racines* ».

2ème méthode : On factorise l'expression de $f'(x)$ puis on fait un tableau de signes :

$$f'(x)=a(x-x_1)(x-x_2)=3\left(x+\frac{5}{3}\right)(x-1)$$

$$\text{ou encore} \quad f(x)=(3x+5)(x-1)$$

Attention : Il faut séparer le tableau de signes de f' et le tableau de variation de f.

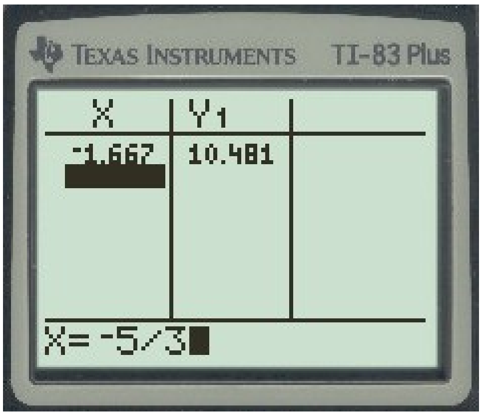
x	$-\infty$		$-5/3$		1		$+\infty$
$x+\dfrac{5}{3}$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		$-5/3$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$10{,}481$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

On calcule $f(-5/3)\simeq 10{,}481 > 0$ et $f(1) = 1 > 0$.

Sur une calculatrice TI, on rentre dans « DefTable » ou « TableSet » et on utilise Ask ou «Dem» puis on rentre dans « Table » pour calculer *__une seule valeur__*, par exemple : $f(-5/3)$



__Calcul des limites aux bornes de l'ensemble de définition__ :

f est une fonction polynôme, ses limites en $-\infty$ et en $+\infty$ sont les mêmes que les limites de son terme de plus haut degré. En effet :

$$f(x)=x^3+x^2-5x+4=x^3\left(1+\frac{x^2}{x^3}-\frac{5x}{x^3}+\frac{4}{x^3}\right)=x^3\left(1+\frac{1}{x}-\frac{5}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right).$$

Or, $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}-\frac{5}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)=1$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}x^3=-\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x^3=+\infty$

Donc par produit des limites, on obtient :

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

2°) *Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Nous allons « *découper* » le domaine de définition en trois intervalles et appliquer le corollaire du th.v.i. sur chacun de ces intervalles.

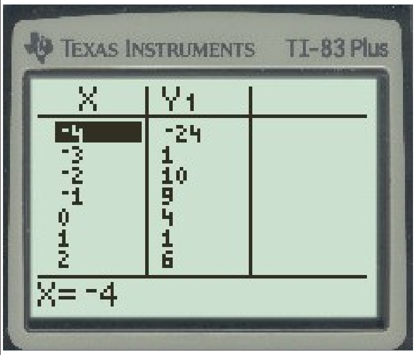
1. *Sur*] $-\infty$; – 5/3], *on voit bien que la fonction est continue, strictement croissante et « passe » de valeurs négatives (* $-\infty$ *) à des valeurs positives f(–5/3) >0. Mais pour appliquer le th.v.i., il nous faut un intervalle [a ; b]. A l'aide de la calculatrice, on cherche une valeur a< –5/3 telle que f(a)<0. Par exemple f(–4)= –24. On a donc :*

   - Sur l'intervalle [–4 ; –5/3], la fonction *f* est définie, continue et strictement croissante et prend ses valeurs dans $[f(-4), f(-5/3)]$. De plus, $0 \in [f(-4), f(-5/3)]$, donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $\alpha \in [-4\,;-5/3]$.
2. - Sur l'intervalle [–5/3 ; 1], la fonction *f* est définie, continue et strictement décroissante et prend ses valeurs dans $[1\,; f(-5/3)]$. De plus, $0 \notin [1\,; f(-5/3)]$, donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ n'admet aucune solution sur l'intervalle [–5/3 ; 1].
3. - Sur l'intervalle [1 ; $+\infty$ [, la fonction *f* est définie, continue et strictement croissante et prend ses valeurs dans $[1\,;+\infty[$. De plus, $0 \notin [1\,;+\infty[$, donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ n'admet aucune solution sur l'intervalle [–5/3 ; 1].

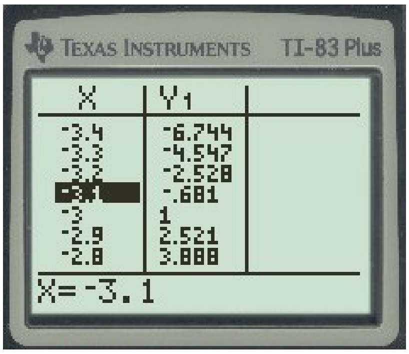
Conclusion : l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $\alpha \in [-4\,;-5/3]$.

3°) *Donnons un encadrement puis une valeur approchée, arrondie à* 10^{-2} *près, de* α

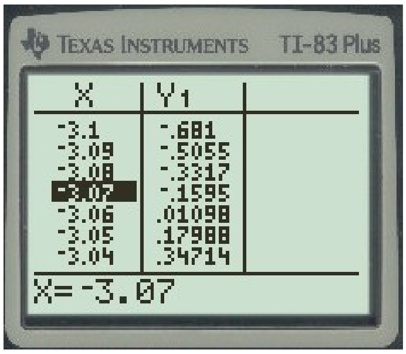
A l'aide de la calculatrice ; ouvrir « DefTable » ou « TableSet », rentrer « DebTable = – 4 » ou « TableStart = – 4 » et préciser « PasTable = 1 ». On constate que *f* (– 4) = – 24 < 0 et *f* (– 3) = 1 > 0. Donc, d'après le corollaire du th.v.i. : $-4 < \alpha < -3$.



Pas =1 : donc $-4 < \alpha < -3$



Pas= 0,1 : donc $-3{,}1 < \alpha < -3{,}0$



Pas= 0,01 : donc $-3{,}07 < \alpha < -3{,}06$

On recommence avec un « PasTable = 0.1 ». On constate que $f(-3,1) = -0,681 < 0$ et $f(-3) = 1 > 0$. Donc, d'après le corollaire du th.v.i. : $-3,1 < \alpha < -3,0$

Enfin, on recommence avec un « PasTable = 0.01 ». On constate que $f(-3,07) = -0,1595 < 0$ et $f(-3,06) = 0,01098 > 0$. Donc, d'après le corollaire du th.v.i. : $-3,07 < \alpha < -3,06$.

Conclusion 1. : Un encadrement de α à 10^{-2} près, est donné par :

$$\boxed{-3,07 < \alpha < -3,06 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}}$$

Pour trouver une valeur approchée de α à 10^{-2} près, il suffit de recommencer la même procédure que ci-dessus avec un « PasTable = 0.001 », ou plus simplement « PasTable = 0.005 ». Avec Ask, ou «Dem», on peut aussi calculer directement $f(-3,065) = -0,0741 < 0$ et $f(-3,06) = 0,01098 > 0$. Donc α est dans la deuxième moitié de l'intervalle d'encadrement. Ce qui signifie que « le chiffre suivant est supérieur ou égal à 5 ».

Comme en 6ème on en déduit qu'une valeur approchée de α à 10^{-2} près est donnée par :

$$\boxed{\alpha \simeq -3,06 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}}$$

4°) *Déduire des résultats précédents le signe de $f(x)$ sur* $\mathbb{R}$

D'après le tableau de variation de la fonction f et ce qui précède, on peut déduire le signe de f :
Pour tout $x < \alpha$: $f(x) < 0$ et pour tout $x > \alpha$: $f(x) > 0$, qu'on peut résumer dans le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

CQFD.