Chapitre 2

Généralités sur les fonctions

1. Vocabulaire des fonctions

Soit D un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$.

1.1) Définitions

Définir une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ (lire *de* D *dans* $\mathbb{R}$), c'est *associer* (ou *faire correspondre*) à chaque nombre réel $x \in D$, un nombre réel ***unique*** $y \in \mathbb{R}$ appelé image de *x* par la fonction *f*. On note :

$$f : D \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y = f(x)$$

Le nombre *y*, noté *f(x),* s'appelle *l'image* de *x* par la fonction f et *x* est ***un*** *antécédent* de *y* par la fonction f dans D.

Si tous les nombres réels dans D, ont une image par *f*, on dit que D est le domaine de définition ou ensemble de définition de la fonction *f.*

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ [$x \in D$ si, et seulement si, f(x) existe et est unique]

Remarque

On peut définir une fonction de plusieurs manières :

- Avec une expression du « langage courant » ou « langage usuel » ;
- Avec une « expression algébrique » ou une « formule »,
- Avec un programme informatique ;
- Avec un tableau de valeurs « point par point » ; ou un tableur ;
- Avec une courbe représentative ;

Il est plus ou moins facile de passer parfois de l'une à l'autre.

Exemples

- En langage courant : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui, à tout nombre réel associe « la somme de son carré et de son cube ».
- Par une expression algébrique la fonction f est définie sur D = $\mathbb{R}$ par :

$$f : D \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y = f(x) = x^2 + x^3$$

- Avec un tableau de valeurs (insuffisant pour définir les images de tous les nombres !)

x	–3	–2	–1	0	1,5	2	3
f(x)	–18	– 4	0	0	5,625	12	36

- Par un programme informatique

Pgm1.	Choisir un nombre Calculer son carré Calculer son cube Calculer la somme de son carré et son cube Afficher le résultat

1.2) Représentation graphique

a) Repère orthonormé

Trois points distincts O, I et J non alignés forment un repère (O, I, J) des points du plan.

- O est l'origine du repère ;
- (OI) est l'axe des abscisses et OI est l'unité de la graduation sur cet axe.
- (OJ) est l'axe des ordonnées et OJ est l'unité de la graduation sur cet axe.

Tous les points du plan sont « *repérés* » par un couple de deux coordonnées (x,y)

Définitions

– On dit qu'un repère (O, I, J) est orthogonal si et seulement si les deux axes (OI) et (OJ) sont perpendiculaires.

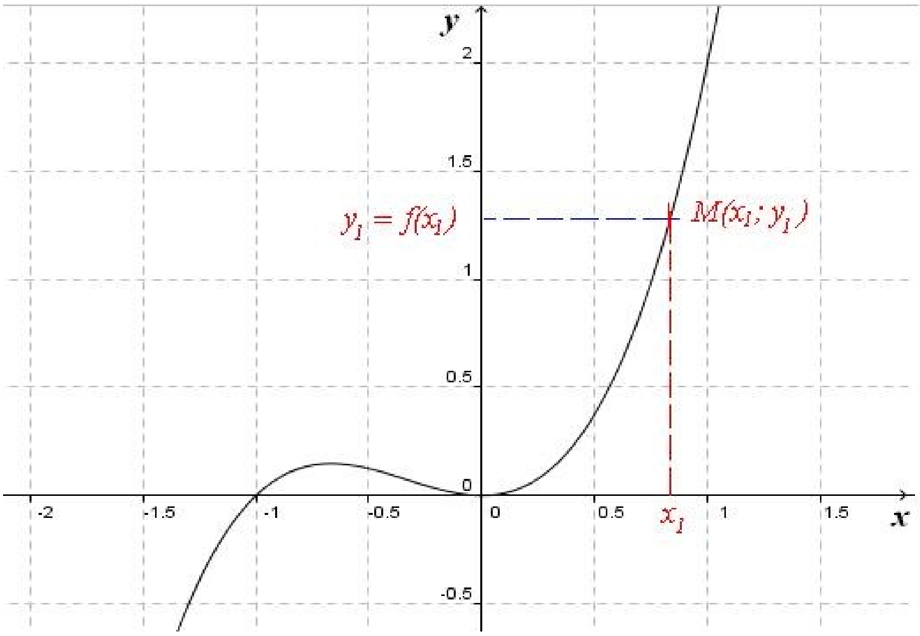
– On dit qu'un repère (O, I, J) est orthonormé ou orthonormal si et seulement si

- les deux axes (OI) et (OJ) sont perpendiculaires : (OI) $\perp$ (OJ)
- Et les unités sur les deux axes sont égales : OI = OJ

b) Représentation graphique

La « représentation graphique » ou « courbe représentative » de f dans un repère donné (orthonormé ou non) est l'ensemble de tous les points M de coordonnées $(x\,;f(x))$ où $x \in D$. On note souvent C_f cette représentation graphique.

Pour tout $x \in D$:	[M$(x, y) \in C_f$ si et seulement si $y = f(x)$]

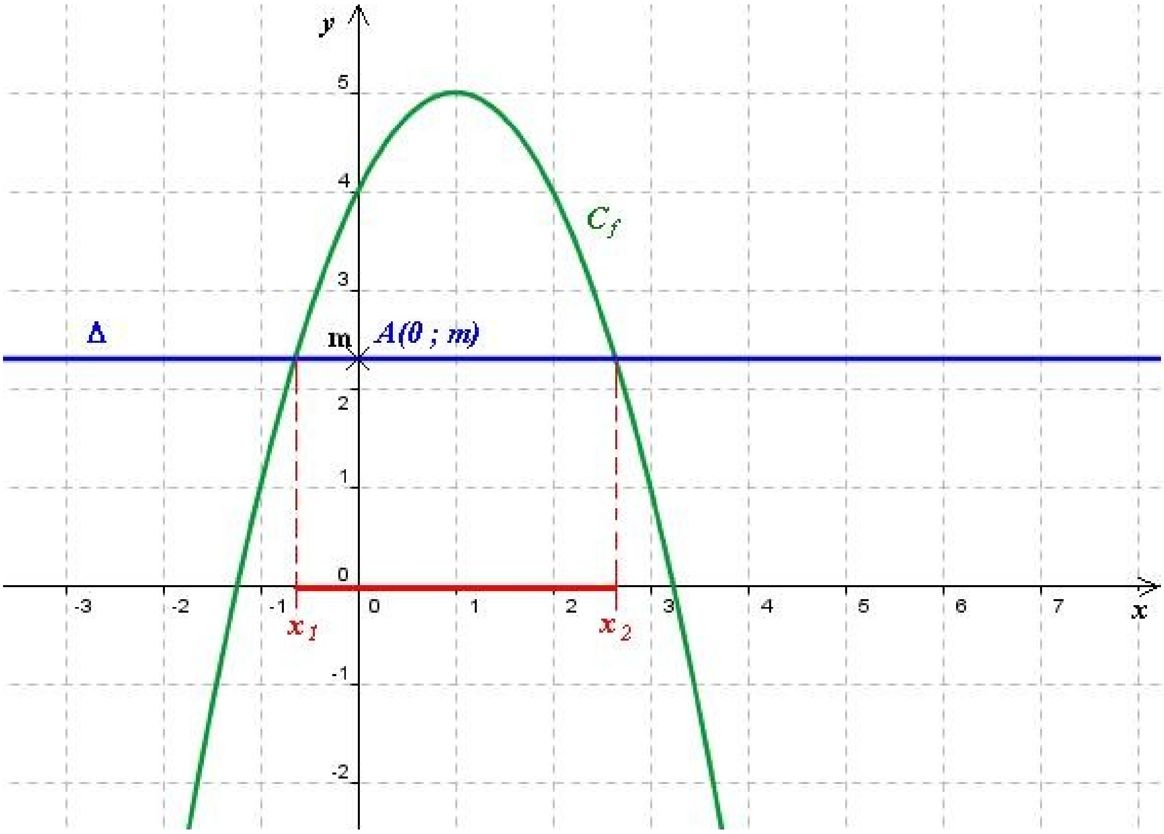


y
2
1.5
$y_1 = f(x_1)$
$M(x_1; y_1)$
1
0.5
0
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
x_1
1
1.5
x
-0.5

1.3) Résolution graphique d'équations et d'inéquations

Soit f une fonction définie sur un intervalle D de $\mathbb{R}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère (O ;I ;J).

La droite Δ parallèle à l'axe des abscisses et passant par le point *A(0 ;m)* coupe (ou ne coupe pas) la courbe C_f.



a) Résolution de l'équation : *f(x) = m*

Cela revient à déterminer l'ensemble des antécédents de m, s'il en existe, par la fonction *f*, ou encore à chercher l'ensemble des des abscisses des points d'intersection s'il en existe, de la courbe C_f avec la droite Δ .

Résoudre les équations : (1) *f(x)* = 1 ; (2) *f(x)* = 0 ; (3) *f(x)* = 5 et (4) *f(x)* = 6.

Exemple 1 : Pour résoudre l'équation (1), on trace la droite Δ_1 (pou y = 1) et on cherche les abscisses des points d'intersection s'il en existe, de la courbe C_f avec la droite Δ_1 .

Dans ce cas, la droite Δ_1 coupe la courbe en deux points d'abscisses : $x = -1$ et $x = 3$.

On peut conclure de deux manières :

Conclusion 1. L'équation (1) « *f(x)* = 1» admet deux solutions –1 et 3. Donc S={–1 ;3}.

Conclusion 2. Le nombre 1 admet deux antécédents par la fonction *f*, qui sont –1 et 3.

b) Résolution de l'inéquation : *f(x) > m*

Cela revient à déterminer l'ensemble des abscisses des points de la courbe C_f, s'il en existe, situés au-dessus de la droite Δ .

Résoudre les équations : (1) $f(x) > 1$; (2) $f(x) > 4$; (3) $f(x) > 5$ et (4) $f(x) > 6$.

Exemple 2 : Pour résoudre l'inéquation (1), on trace la droite Δ_1 (pou y = 1) et on cherche les abscisses de tous les points de C_f , situés au-dessus de la droite Δ_1 .

Ici, les abscisses des points de la courbe situés au-dessus de la droite Δ_1 sont tous les nombres réels x compris entre –1 et 3 ; c'est-à-dire $-1 < x < 3$. Ce qui correspond à l'intervalle]–1;3[.

Conclusion : L'ensemble des solutions de cette inéquation est : S =]–1;3[.

c) Résolution de l'inéquation : *f(x) < m*

Cela revient à déterminer l'ensemble des abscisses des points de la courbe C_f, s'il en existe, situés en dessous de la droite Δ .

Résoudre les équations : (1) $f(x) < 1$; (2) $f(x) < 4$; (3) $f(x) < 5$ et (4) $f(x) < 6$.

Exemple 3 : Pour résoudre l'inéquation (1), on trace la droite Δ_1 (pou y = 1) et on cherche les abscisses de tous les points de C_f, situés en dessous de la droite Δ_1 .

Dans ce cas, les abscisses des points de la courbe situés en dessous de la droite Δ_1 sont tous les nombres réels *x inférieurs à* –1ou *x supérieurs à* 3 ; c'est-à-dire $x < -1$ ou $x > 3$. Ce qui correspond à la réunion des deux intervalles $]-\infty;-1[$ et $]3 ; +\infty[$.

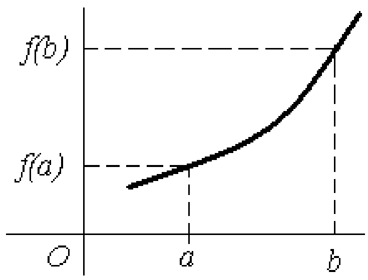
Conclusion : L'ensemble des solutions de cette inéquation est : $S =]-\infty;-1[\cup]3 ;+\infty[$.

2. Sens de variation des fonctions

2.1) Fonctions croissantes, fonctions décroissantes

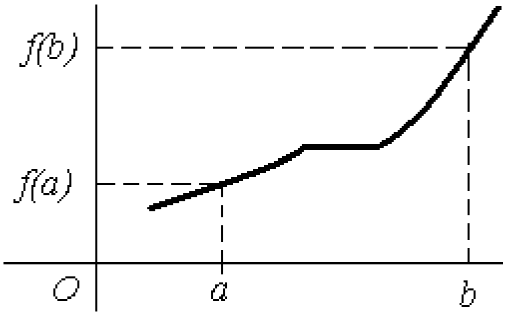
Définition 1. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Dire que f est ***strictement croissante sur I***, signifie que l'application de f *conserve le sens des inégalités*, c'est-à-dire :

Pour tous nombres a et $b \in$ I : [Si $a < b$, alors $f(a) < f(b)$] (inégalités strictes)



<u>Définition 2</u>. Dire que f est ***croissante sur I***, signifie que:

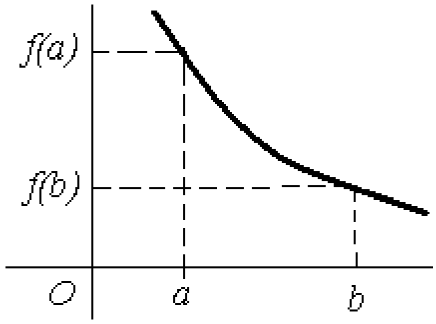
Pour tous nombres a et $b \in I$: [Si $a < b$, alors $f(a) \leq f(b)$] (inégalité large)



<u>Remarque :</u> *Les abscisses des points situés sur le pallier ont tous la même image !*

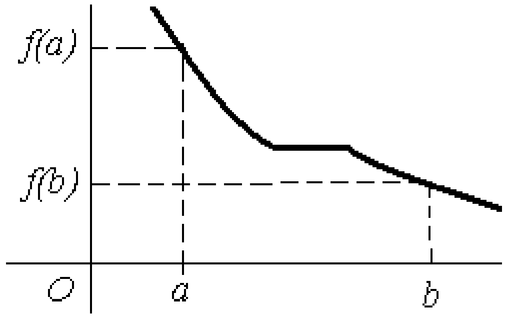
<u>Définition 3</u>. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Dire que f est ***strictement décroissante sur I***, signifie que l'application de f *<u>change le sens des inégalités</u>*, c'est-à-dire :

Pour tout nombres a et $b \in I$: [*Si $a < b$, alors $f(a) > f(b)$*] (inégalités strictes)



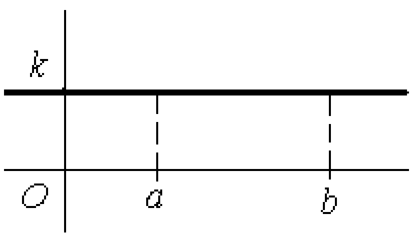
<u>Définition 4</u>. Dire que f est ***décroissante sur I***, signifie que:

Pour tous nombres a et $b \in I$: [*Si $a < b$, alors $f(a) \geq f(b)$*] (inégalité large)



<u>Définition 5</u>. Dire que f est ***<u>constante sur I</u>***, signifie que : associe *la même image* à tous les nombres dans I. *Pour tous nombres a et $b \in I$:* [*$f(a) = f(b)$*].

Si on appelle k cette valeur commune, on a : *Pour tout nombre $x \in I$:* [*$f(x) = k$*].



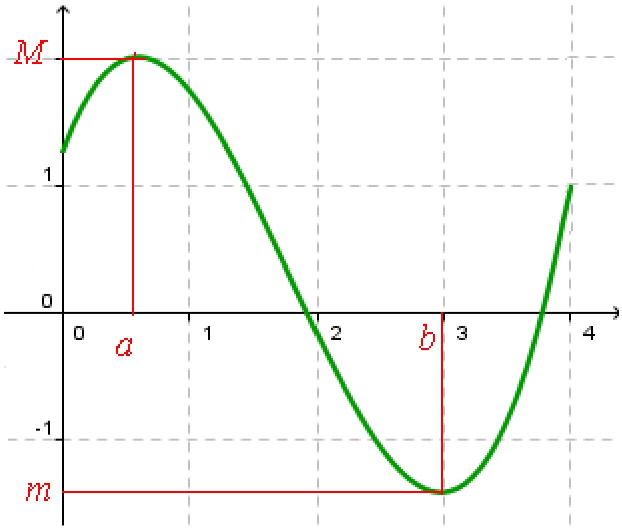
2.2) Maximum et minimum d'une fonction

Définition 1. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de ℝ et a un nombre réel de I. Dire que f admet un maximum M en a sur I signifie que :

Pour tout nombre réel $x \in I$: [$f(x) \leq f(a)$] *ou* [$f(x) \leq M$] *(inégalité large)*

Définition 2. Soit f une fonction définie sur un intervalle I dans ℝ et b un nombre réel de I. Dire que f admet un minimum m en b sur I signifie que :

Pour tout nombre réel $x \in I$: [$f(x) \geq f(b)$] ou [$f(x) \geq m$] *(inégalité large)*.



Ici, la fonction est définie sur l'intervalle I = [0 ; 4] et admet un maximum M = 2 en $a \cong 0{,}5$ et un minimum $m \cong -1{,}5$ en $b = 3$.

On peut résumer les deux conditions en une :

Pour tout nombre réel $x \in [0\,;4]$: [$m \leq f(x) \leq M$]

On dit que la fonction est *bornée* sur l'intervalle [0;4]

2.3) Tableau de variations d'une fonction

Définition. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de ℝ .

On utilise un *tableau de variations* pour résumer le sens de variations de f, donc pour déterminer tous les intervalles de ℝ sur lesquels f est ***monotone***, c'est-à-dire soit croissante soit décroissante, soit constante.

Exemple. Le tableau de variations de la fonction représentée ci-dessus est :

x	0		0,5		3		4
$f(x)$	1,2	↗	2	↘	– 1,5	↗	1

← Variations de x

← Variations de $f(x)$

Exemple 1.

Sens de variation des fonctions affines $x \to f(x) = ax + b$ (et linéaires si $b = 0$).

On sait que la fonction f est (strictement) croissante si $a > 0$ et f est (strictement) décroissante si a < 0. La fonction f est constante si $a = 0$.

$a > 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$+$
	$-$		

$a < 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$	$+$		
		$\searrow$	$-$

$a = 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$\rightarrow$	

Exemple 2.

1°) Construire une courbe représentative d'une fonction f dont le tableau de variations est donné par

x	-2		0		3		5
$f(x)$		$\nearrow$	2	$\searrow$		$\nearrow$	3
	-1				-2		

2°) Peut-on prévoir les antécédents de 0 ?
3°) Peut-on comparer f(0) et f(1) ? Justifier
4°) Peut-on comparer f(1) et f(2) ? Justifier
5°) Peut-on comparer f(1) et f(4) ? Justifier