Les droites

1. Coefficient directeur ; ordonnée à l'origine

On considère le plan muni d'un repère orthonormé (O ; I , J).

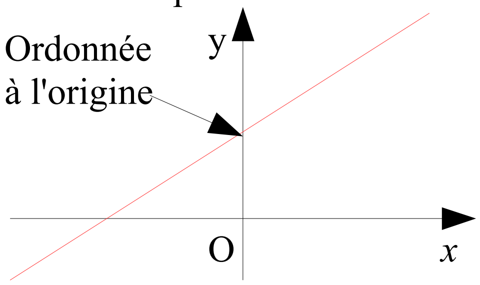
1.1) Droites non parallèles à l'axe des ordonnées

Définition : On considère une droite *D non parallèle à l'axe des ordonnées*.

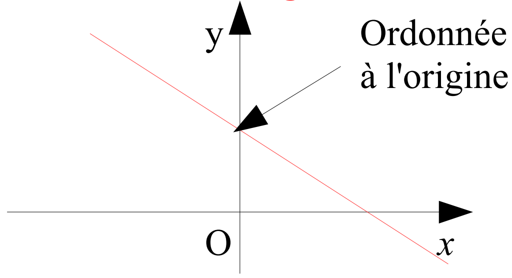
Quels que soient les points A et B sur la droite *D*, le rapport $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ est constant et s'appelle le ***coefficient directeur***, noté ***a***, de la droite *D* :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\textit{Déplacement vertical}}{\textit{Déplacement horizontal}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

L'ordonnée du point d'abscisse 0 se note b s'appelle ***l'ordonnée à l'origine*** de la droite.



Coefficient directeur positif



Coefficient directeur négatif

Remarques : Dans un repère orthonormé (O; I , J), le nombre ***a*** désigne ***la pente*** ou ***l'inclinaison*** de la droite *D*.

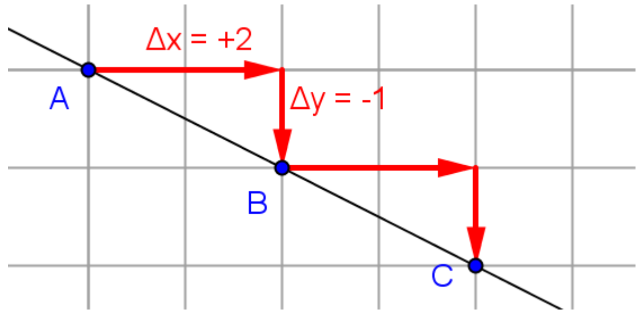
- Une droite *parallèle à l'axe des abscisses* est *horizontale* et est donc de *pente nulle*. Donc, son coefficient directeur est nul : $a = 0$. Ce qui signifie que tous les points de la droite *D* ont la même ordonnée $y = b$.

- Une droite *parallèle à l'axe des ordonnées* ou *verticale n'a pas de coefficient directeur*. On dit qu'elle est de « *pente infinie* ». Ce qui signifie que tous les points de la droite *D* ont la même abscisse $x = c$.

1.2) Comment déterminer le coefficient directeur d'une droite ?

Méthode 1 : Déterminer un coefficient directeur (méthode de l'escalier).

Exemple 1.



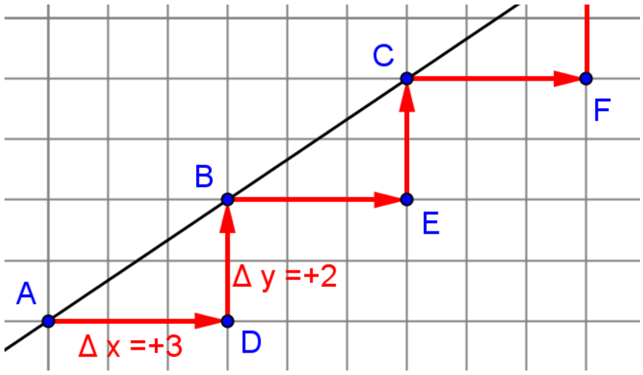
Choisir deux points A et B (sur la grille) de la droite. Dessiner le déplacement horizontal et le déplacement vertical sur la grille, alors :

$$a=\frac{\textit{déplacement vertical}}{\textit{déplacement horizontal}}$$

$$a=\frac{-1}{+2} \quad \text{Donc} \quad a=\frac{-1}{2}$$

Attention au sens des déplacements.

Exemple 2



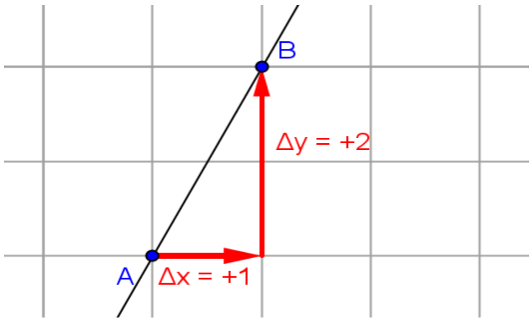
Choisir deux points A et B sur la grille) de la droite. Dessiner le déplacement horizontal et le déplacement vertical sur la grille, alors :

$$a=\frac{\textit{déplacement vertical}}{\textit{déplacement horizontal}}$$

$$a=\frac{+2}{+3} \quad \text{Donc} \quad a=\frac{2}{3}$$

Attention au sens des déplacements.

Exemple 3. Cas particulier :



Avec la même méthode, en avançant d'une unité (+1) sur l'axe horizontal, on obtient directement le coefficient directeur :

$$a=\frac{\textit{déplacement vertical}}{\textit{déplacement horizontal}}$$

$$a=\frac{+2}{+1} \quad \text{Donc} \quad a=2 \ .$$

Méthode 2 : Dans le repère orthonormé (O ; I , J), on peut lire directement les coordonnées des points A et de B puis calculer le coefficient directeur *a* de la droite (AB).

Par exemple : Si A (1;3) et B (4 ;1), alors par définition $a=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\cdots$

1.3) Comment tracer une droite connaissant son coefficient directeur et un point ?

Exemple : Tracer la droite D passant par le point A (–1; 2) et de coefficient directeur $a=\frac{-4}{3}$.

Méthode 1. On se place dans un repère orthonormé (O ; I , J).

1°) Placer le point A.

2°) Dessiner le coefficient directeur en partant de ce point, par l'effet "escalier".

3°) On obtient un deuxième point B de la droite.

4°) On trace la droite passant par ces deux points.

<u>Méthode 2</u> : Tracer une droite connaissant son coefficient directeur et son ordonnée à l'origine.

1°) Placer l'ordonnée à l'origine sur l'axe des ordonnées ; on a un point A(0 ; b).

2°) Dessiner le coefficient directeur par la métode de l'escalier ;

3°) Puis tracer.

1.4) Coefficients directeurs et droites parallèles

<u>Propriété</u> : *On considère deux droites D et D' <u>non parallèles à l'axe des ordonnées</u>.*
(P_1) : *Si D et D' sont **<u>parallèles</u>**, alors elles ont **<u>le même coefficient directeur</u>**.*
(P_2) : **Réciproquement** *: si D et D' ont le même coefficient directeur, alors D et D' sont parallèles.*

II. Equations de droites

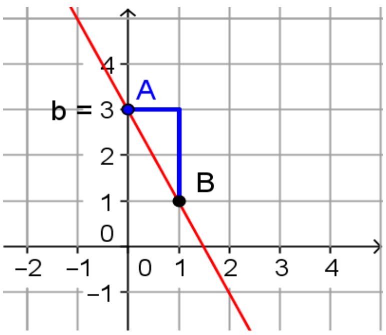
On considère le plan muni d'un repère(O, I, J).

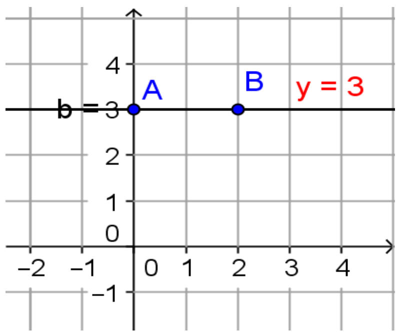
2.1) Équation réduite d'une droite

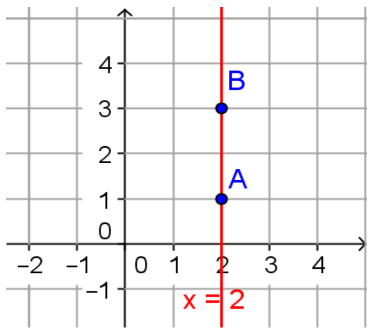
<u>1) Théorème</u>

1°) Toute droite D <u>*non parallèle à l'axe des ordonnées*</u> a une équation de la forme $y = a\,x + b$, où a et b sont deux nombres réels. Cette équation est appelée <u>*l'équation réduite de la droite D*</u>. Le nombre a est le <u>*coefficient directeur*</u> de D et le nombre b est <u>*l'ordonnée à l'origine*</u> de D.

2°) Toute droite D <u>*parallèle à l'axe des ordonnées*</u> a une équation de la forme $x = c$, où c est un nombre réel. Ce qui signifie que tous les points de la droite D ont la même abscisse $x = c$.







1°) D_1 a pour équation $y = -2x + 3$.
Coefficient directeur $a = -2$;
ordonnée à l'origine $b = 3$.

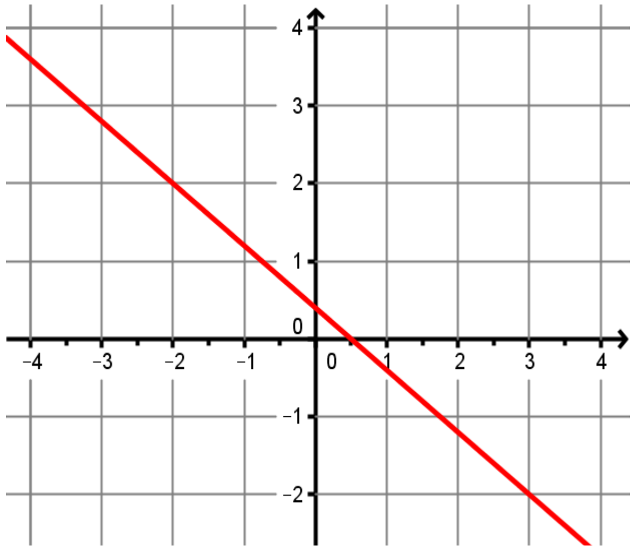
2°) D_2 a pour équation $y = 3$
Coefficient directeur $a = 0$.
D_2 est parallèle à l'axe des abscisses.
Ordonnée à l'origine $b = 3$.

3°) D_3 a pour équation $x = 2$.
D_3 n'a pas de coefficient directeur.
D_3 est parallèle à l'axe des ordonnées.

Remarque très importante :
Toute droite D *non parallèle à l'axe des ordonnées* ayant pour équation $y=ax+b$, est la représentation graphique d'une ***fonction affine***. Définie par $f(x)=ax+b$.

2.2) Déterminer l'équation d'une droite à partir du graphique

Méthode 1 : Déterminer graphiquement l'équation de la droite ci-contre :
1°) Lire le coefficient directeur par la méthode de l'escalier si c'est possible ;
2°) Lire l'ordonnée à l'origine ;
3°) Donner l'équation de la droite.



Remarque : Il n'est pas toujours facile de lire avec précision ni le coefficient directeur ni l'ordonnée à l'origine, Alors , il faut repérer deux points de la droite sur la grille, trouver leurs coordonnées et appliquer la méthode suivante :

Méthode 2 : Déterminer l'équation d'une droite *D* connaissant deux de ses points :
1°) La droite D est oblique, donc son équation est de la forme $y = a x + b$.
2°) Repérer deux points de la droite sur la grille
3°) Calculer a en écrivant $a=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\cdots$
4°) Pour calculer b, écrire que A $(x_A\ ;\ y_A) \in$D ou que B $(x_B\ ;\ y_B) \in$D.

III. Système de deux équations à deux inconnues

On considère le plan muni d'un repère orthonormé (O ; I, J).

Définition : Un système de deux équations à deux inconnues x et y est de la forme :

$$\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 3x-2y=7 \end{cases}$$

Ce système est formé des « ***équations générales*** » de deux droites D_1 et D_2.

Nous avons déjà vu ces systèmes en classes de 3ème et Seconde. On connaît deux méthodes pour les résoudre.

- **Méthode 1. « par substitution »**
- **Méthode 2. « par combinaison »**

La **méthode 3** est « **graphique** » permet de connaître le nombre de solutions du système, mais pas toujours les valeurs exactes des solutions lorsqu'ellent existent.

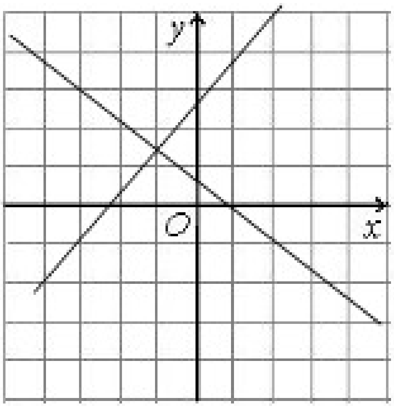
Un couple solution (x ; y) signifie que le point M de coordonnées (x ; y) appartient à ces deux droites. Donc $M(x ; y)$ est le point d'intersection de ces deux droites lorsque c'est possible.

Pour trouver le coefficient directeur d'une droite d'équation générale : $ax+by=c$; on doit isoler y. On écrit : $by=-ax+c$; donc si b $\neq 0$, on obtient $y=\frac{-a}{b}x+\frac{c}{b}$.

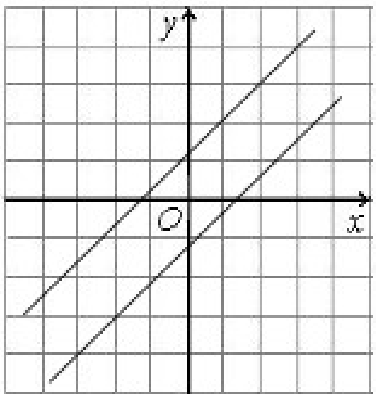
Donc le coefficient directeur de cette droite est : $m=\frac{-a}{b}$

Théorème :
Dans le plan rapporté à un repère (O ; I , J), les deux équations sont représentées par deux droites D_1 et D_2. On distingue trois cas possibles :

D_1 et D_2 sont sécantes :
Le système admet **un seul couple solution**, formé des coordonnées du point d'intersection de D_1 et D_2.



D_1 et D_2 sont sécantes :
Le système n'admet **aucun couple solution.**



D_1 et D_2 sont confondues :
Le système admet **une infinité de couples solutions**, formé des coordonnées de tous les points de la droite $D_1=D_2$.