Chapitre 5

Fonctions dérivées & applications

Ce que dit le programme :

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Dérivation Nombre dérivé d'une fonction en un point. **Tangente à la courbe représentative d'une fonction dérivable en un point.**	Tracer une tangente connaissant le nombre dérivé.	Le nombre dérivé est défini comme limite du taux d'accroissement $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ quand h tend vers 0. On ne donne pas de définition formelle de la limite. L'utilisation des outils logiciels facilite l'introduction du nombre dérivé.
Fonction dérivée. Dérivée des fonctions usuelles $\sqrt{x}$ $\frac{1}{x}$ et x^n (n entier naturel non nul). Dérivée d'une somme, d'un produit et d'un quotient. ✓	Calculer la dérivée de fonctions. ✓	On évite tout excès de technicité dans les calculs de dérivation. Si nécessaire, dans le cadre de la résolution de problèmes, le calcul de la dérivée d'une fonction est facilité par l'utilisation d'un logiciel de calcul formel. ✓ Il est intéressant de présenter le principe de démonstration de la dérivation d'un produit. ✓
Lien entre signe de la dérivée et sens de variation. ✓ Extremum d'une fonction. ✓	Exploiter le sens de variation pour l'obtention d'inégalités. ✓	Il n'est pas toujours utile de recourir à la dérivation pour étudier le sens de variation d'une fonction. ✓ On traite quelques problèmes d'optimisation. ✓

I. Dérivées de fonctions composées

I.1) Formulaire

<u>Théorème 1</u>. Dérivées des fonctions composées :

Soient u et v deux fonction définies et dérivables sur un même intervalle I de $\mathbb{R}$, k un nombre réel et n un nombre entier non nul. Alors, on a le formulaire de dérivation suivant :

1°) $(u+v)'=u'+v'$	5°) $\left(\frac{1}{v}\right)'=-\frac{v'}{v^2}$
2°) $(k\,u)'=k\,u'$	6°) $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$
3°) $(uv)'=u'v+u\,v'$	7°) $\left(\sqrt{u}\right)'=-\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
4°) $(u^n)'=n\,u'\,u^{n-1}$, $(n\neq 0)$	8°) $(\cos(u))'=-u'\sin(u)$
4°bis) $(u^2)'=2\,u'\,u$	9°) $(\sin(u))'=u'\cos(u)$
4°ter) $(u^3)'=3\,u'\,u^2$	

Par définition, pour tout $x\in I$: $(u+v)(x)=u(x)+v(x)$; $(k\,u)(x)=k\,u(x)$

et $(uv)(x)=u(x)\,v(x)$. Pour tout $x\in I$ tel que v(x)≠0, on a $\left(\frac{1}{v}\right)(x)=\left(\frac{1}{v(x)}\right)$

1.2) Dérivée de la somme : $u + v$

Théorème 1.

Soient u et v deux fonction définies et dérivables sur un même intervalle I de $\mathbb{R}$.
Alors la fonction $u+v$ est dérivable et pour tout $x \in I$:

$$(u+v)'(x) = u'(x) + v'(x)$$

Démonstration :

Pour tout $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ on a :

$$\frac{(u+v)(x+h)-(u+v)(x)}{h} = \frac{u(x+h)+v(x+h)-u(x)-v(x)}{h} = \frac{u(x+h)-u(x)}{h} + \frac{v(x+h)-v(x)}{h}$$

Par passage à la limite, lorsque h tend vers 0, on constate bien que :

$$(u+v)'(x) = u'(x) + v'(x)$$

Exemple 1 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^4 + x^3$. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée f' est définie par : $f'(x) = 4x^3 + 3x^2$.

1.2) Dérivée du produit par un nombre : $k\,u$

Théorème 2.

Soient u et v deux fonction définies et dérivables sur un même intervalle I de $\mathbb{R}$ et k un nombre réel. Alors la fonction ku est dérivable et pour tout $x \in I$:

$$(k\,u)'(x) = k\,u'(x)$$

Démonstration :

Pour tout $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ on a :

$$\frac{(k\,u)(x+h)-(k\,u)(x)}{h} = \frac{k\,u(x+h)-k\,u(x)}{h} = k \times \frac{u(x+h)-u(x)}{h}$$

Par passage à la limite, lorsque h tend vers 0, on constate bien que :

$$(k\,u)'(x) = k\,u'(x).$$

Exemple 2 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 5\,x^3$. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée f' est définie par : $f'(x) = 5 \times 3x^2 = 15x^2$.

1.3) Dérivée du produit : $u\,v$

Théorème 3.

Soient u et v deux fonction définies et dérivables sur un même intervalle I de $\mathbb{R}$.
Alors la fonction $u+v$ est dérivable et pour tout $x \in I$:

$$(uv)'(x) = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x)$$

Démonstration :

Pour tout $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ on a :

$$\frac{(uv)(x+h)-(uv)(x)}{h}=\frac{u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x)}{h}$$
$$=\frac{(u(x+h)-u(x))v(x+h)-u(x)(v(x+h)-v(x))}{h}$$
$$=\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\times v(x+h)+u(x)\times\frac{v(x+h)-v(x)}{h}$$

Par passage à la limite, lorsque h tend vers 0, on constate bien que :

$$(u\,v)'(x) = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x)$$

Exemple 3 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3(3x^2+1)$. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée f' est définie par : $f' = u'v + uv'$. Donc pour tout x : $f'(x) = 3x^2\times(3x^2+1) + x^3(3\times2\,x^1+0) = 9x^4+3x^2+6x^4 = 15x^4+3x^2$, qu'on pourrait retrouver aussi en développant avant de dériver.

Remarques :

1°) Dans ce qui suit, nous allons étudier le signe de la dérivée, donc il est conseillé d'écrire toujours la fonction dérivée sous la forme factorisée. Ici, on a :

$$f'(x) = 3x^2(5x^2+1).$$

2°) Dans la formule de la dérivée d'un produit, nous avons dérivé chaque facteur « *à son tour* ». On peut la généraliser à un produit de plusieurs fonctions :

$$(u\,v\,w)'(x) = \boldsymbol{u'(x)}\,v(x)\,w(x) + u(x)\,\boldsymbol{v'(x)}\,w(x) + u(x)\,v(x)\,\boldsymbol{w'(x)}.$$

1.4) Dérivée d'une puissance : u^2, u^3, … u^n

Théorème 4.

Soient u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et n un entier naturel. Alors la fonction u^n est dérivable et pour tout $x\in I$:

$$(u^n)'(x) = n\,u'(x)\,u^{n-1}(x)$$

Démonstration :

C'est un cas particulier du précédent : $u^2=u\times u$ donc $(u^2)'=u'u+uu'=2u'u$

De même : $u^3=u\times u\times u$ donc $(u^3)'=u'uu+uu'u+uuu'=3u'u^2$

Plus généralement : $u^n=\underbrace{u\times u\times\ldots\times u}_{n\ facteurs}$ donc $(u^n)'=nu'u^{n-1}$.

Exemple 3 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x^2+1)^3$. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée f' est définie par : $f' = 3\,u'u^2$. Donc pour tout x : $f'(x) = 3\times2x\times(x^2+1)^2 = 6x(x^2+1)^2$.

1.5) Dérivée de inverse d'une fonction : $\frac{1}{v}$

Théorème 5.

Soient v une fonction définie, dérivable et non nulle sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors la fonction $\frac{1}{v}$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$:

$$\left(\frac{1}{v(x)}\right)' = -\frac{v'(x)}{[v(x)]^2}$$

Démonstration :

Pour tout $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ on a :

$$\frac{\frac{1}{v(x+h)} - \frac{1}{v(x)}}{h} = \frac{\frac{v(x)}{v(x)v(x+h)} - \frac{v(x+h)}{v(x)v(x+h)}}{h} = \frac{1}{v(x)v(x+h)} \times \frac{v(x) - v(x+h)}{h}$$

Par passage à la limite, lorsque h tend vers 0, on constate que : $\left(\frac{1}{v(x)}\right)' = -\frac{v'(x)}{v(x)^2}$

Exemple 4 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$. Alors f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ (puisque $x^2 + 1 \neq 0$ pour tout x) et sa fonction dérivée f' est définie par : $f' = \frac{-v'}{v^2}$. Donc pour tout x : $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$.

1.6) Dérivée d'un quotient : $\frac{u}{v}$

Théorème 5.

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables et v non nulles sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors la fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$:

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$$

Démonstration :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \left(u \times \frac{1}{v}\right) = u' \times \left(\frac{1}{v}\right) + u \times \left(\frac{1}{v}\right)' = \left(\frac{u'}{v}\right) + u \times \left(\frac{-v'}{v^2}\right) = \frac{u'v}{v^2} + \frac{-uv'}{v^2}$$

Par conséquent :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

II. Sens de variation et dérivées

2.1) Signe de la dérivée et sens de variation d'une fonction

Dans ce paragraphe, nous abordons le résultat le plus important lié à la notion de dérivée et qui permettra d'étudier avec plus de facilité, le sens de variation d'une fonction.

Théorème 6.

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et f' sa fonction dérivée. Alors

a) Si la fonction dérivée f' est strcitement positive sur I, (sauf peut-être en un nombre fini de points), alors la fonction f est ***strictement croissante*** sur I.

b) Si la fonction dérivée f' est strcitement négative sur I, (sauf peut-être en un nombre fini de points), alors la fonction f est ***strictement décroissante*** sur I.

c) Si la fonction dérivée f' est nulle sur I, c'est-à-dire que pour tout $x \in I$: $f'(x) = 0$, alors la fonction f est ***constante*** sur I.

Démonstration : Théorème admis.

Exemple 5. Étudier le sens de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3$.

La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 3x^2$.

1er *réflexe :* On résout l'équation $f'(x) = 0$ pour obtenir les valeurs remarquables :

$f'(x) = 0$ équivaut à $3x^2 = 0$ donc à $x = 0$.

2ème *réflexe :* On résout l'équation $f'(x) > 0$ pour connaître le signe de la dérivée :

$f'(x) > 0$ équivaut à $3x^2 > 0$. Ce qui est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On obtient le signe de f' et le ***tableau de variations*** de la fonction f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$	Variations de x
$f'(x)$		$+$	0	$+$		Signe de $f'(x)$
$f(x)$		↗	0	↗		Variations de $f(x)$.

Conclusion : La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exemple 6. Étudier le sens de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 7$.

La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = 2\times 3x^2 + 3\times 2x^1 - 12\times 1 + 0 = 6x^2 + 6x - 12$$

1*er* *réflexe :* On résout l'équation $f'(x) = 0$ pour obtenir les valeurs remarquables :

$f'(x) = 0$ équivaut à $6x^2 + 6x - 12 = 0$

donc à $6(x^2 + x - 2) = 0$

Or, $6 \neq 0$, donc : $f'(x) = 0$ équivaut à $x^2 + x - 2 = 0$.

On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4\text{x}1\text{x}(-2) = 9$.

$\Delta > 0$. Donc, l'équation admet deux solutions réelles : $x_1 = -2$ et $x_2 = 1$.

2*ème* *réflexe :* On résout l'équation $f'(x) > 0$ pour connaître le signe de la dérivée :

$f'(x) > 0$ équivaut à $6(x^2 + x - 2) > 0$, donc à $6(x+2)(x-1) > 0$.

Or, on sait qu'un trinôme du second degré est du signe de « *a* » à l'extérieur des racines.

On obtient le signe de $f'(x)$ et le ***tableau de variations*** de la fonction f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	$f(-2)$	↘	$f(1)$	↗	

Conclusion : La fonction f est strictement croissante sur $]-\infty\,;-2]$, strictement décroissante sur $[-2\,;1]$ et strictement croissante sur $[1\,;+\infty[$.

2.2) Extremums locaux

Définition 1.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.

- On dit que la fonction f admet un ***minimum local***, atteint pour $x = a$, signifie qu'il existe un intervalle J, contenu dans I tel que :

  Pour tout $x \in J$: $f(x) \geqslant f(a)$

- On dit que la fonction f admet un ***maximum local***, atteint pour $x = a$, signifie qu'il existe un intervalle J, contenu dans I tel que :

  Pour tout $x \in J$: $f(x) \leqslant f(a)$

  - Un minimum ou un maximum local d'une fonction f s'appelle un ***extremum local***.

Exemple 7. Étudier la présence d'extremums locaux de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=2x^3+3x^2-12x+7$.

Nous avons vu dans l'exemple précédent que la fonction f a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f(x)$		↗	$+27$	↘	0	↗	

D'après ce tableau de variations, la fonction f admet un ***maximum local*** égal à 27, atteint pour $x = -2$ et un ***minimum local*** égal à 0, atteint pour $x = 1$.

Il suffit de prendre $J_1 =]-\infty\,;1]$. Pour tout $x \in J_1$: $f(x)\leqslant f(-2)$. (en rouge)

et de prendre $J_2 = [-2\,;+\infty[$. Pour tout $x \in J_2$: $f(x)\geqslant f(1)$. (en bleu)

Théorème 7.

Soit f une fonction ***définie et dérivable*** sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et f' sa fonction dérivée. Soit $\alpha \in I$. Alors :

a) Si la fonction dérivée f' ***s'annule*** en ***changeant de signe*** en $\alpha \in I$, alors f admet un extremum local en $\alpha \in I$.

b) La réciproque est fausse

Démonstration : Théorème admis.

Exemple 8. Étudier la présence d'extremums locaux de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=2x^3+3x^2-12x+7$.

Nous avons vu dans l'exemple précédent que la fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗	$+27$	↘	0	↗	

D'après ce tableau de variations, la fonction f est croissante puis décroissante, donc f admet un ***maximum local*** égal à 27, atteint pour $x = -2$; et f est décroissante puis croissante, donc f admet un ***minimum local*** égal à 0, atteint pour $x = 1$.

Exemple 9. La réciproque est fausse : La fonction « valeur absolue » est définie sur tout $\mathbb{R}$, strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$. Elle admet donc un ***minimum global*** égal à 0 et atteint en $x = 0$. Et pourtant, cette fonction n'est pas dérivable en 0.

2.3) Optimisation

Optimiser* :** du latin ***optimum qui signifie ***le meilleur*** *;* « permettre d'obtenir le meilleur choix ou le meilleur résultat possible par une action adaptée à une situation donnée ».

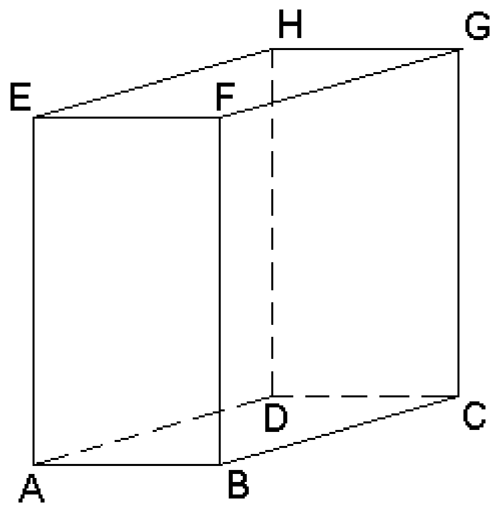
En mathématiques, ***optimiser*** une situation revient à analyser et à ***modéliser*** la situation ***par une fonction*** et de déterminer les extremums donnant le *meilleur choix* pour répondre à la question.

Exemple 10.

On veut réaliser, dans l'angle d'un plan de travail un placard ayant la forme d'un pavé droit ABCDEFGH. Pour des raisons pratiques, si sa largeur en décimètres est AB = x, sa profondeur BC = 12 – x et sa hauteur AE est égale à sa profondeur.

1°) Exprimer le volume $\mathscr{V}$ du placard en fonction de x ;

2°) Déterminer la largeur du pavé pour laquelle le volume est maximal et en déduire les dimensions du placard.



1°) Le volume d'un pavé droit est donné par $\mathscr{V}$ = aire de la base x hauteur = l x L x h.
Donc : $\mathscr{V}(x) = x\times(12-x)\times(12-x) = x(12-x)^2$, (expression factorisée), ou encore : $\mathscr{V}(x) = x^3-24x^2+144x$ où x et (12 – x) désignent des longueurs, donc $x\geqslant 0$ et $12-x\geqslant 0$. Par suite la fonction $\mathscr{V}$ est définie sur l'intervalle [0 ; 12].

2°) La fonction $\mathscr{V}$ est définie et dérivable sur l'intervalle[0 ;12] pour tout $x\in[0\,;12]$:
$\mathscr{V}'(x) = 3x^2-24\times 2x+144 = 3x^2-48x+144$
$\mathscr{V}'(x) = 0$ (ssi) $3(x^2-16x+48)=0$ (ssi) $x^2-16x+48=0$
On calcule le discriminant $\Delta = b^2-4ac = (-16)^2-4\times 1\times 48 = 256-192 = 64$.
$\Delta > 0$. Donc, l'équation admet deux solutions réelles : $x_1 = 4$ et $x_2 = 12$.
$\mathscr{V}'(x)$ est du signe de a = 3, à l'extérieur des racines . D'où le tableau de variations de la fonction $\mathscr{V}$ sur [0 ;12] :

x	0		4		12
$\mathscr{V}'(x)$		+	0	–	
$\mathscr{V}(x)$	0	↗	$\mathscr{V}(4)$	↘	0

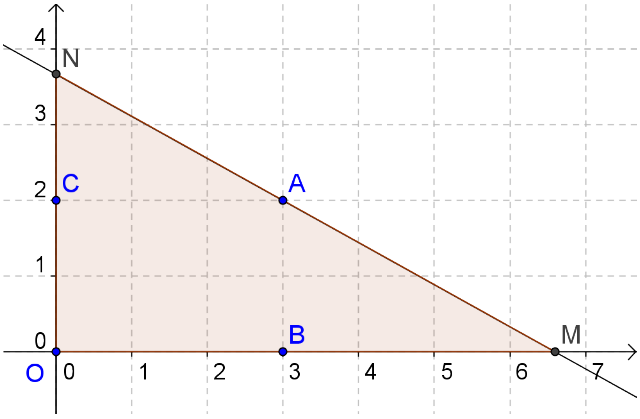
$\mathscr{V}(4) = 4(12-4)^2 = 256$

Conclusion : La fonction volume $\mathscr{V}$ admet un maximum égal à 256 dm^3, atteint pour $x = 4$ dm. Par conséquent, les dimensions du placard sont bien :

Largeur = 4 dm = 40 cm ; profondeur = 12 – 4 = 8 dm = 80 cm et hauteur = 80 cm.

On retrouve bien les dimensions standard de nos placards de cuisine.

<u>Exemple 10.</u> Exercice n°22 p.103 Transmaths 1ère S. Édition 2011 :



Dans un repère orthonormé (O ; I ; J), on donne le point A (3 ; 2). M est un point de coordonnées (x ; 0) avec $x > 3$.

La droite (AM) coupe l'axe des ordonnées au point N.

1°) Démontrer que l'aire du triangle OMN est donnée par : aire (OMN) = $\dfrac{x^2}{x-3}$.

2°) Trouver la position exacte de M pour laquelle l'aire du triangle OMN est minimale.

1°) L'aire d'un triangle est donnée par $\mathscr{A}$ = (base x hauteur) : 2 = (OM x ON): 2.
On sait que OM = x et $x > 3$. Il nous faut calculer ON (en fonction de x).

<u>Calcul de ON en fonction de x</u>.
Il y a plusieurs manières de résoudre ce problème :

<u>1ère méthode :</u> Appliquer le théorème de Thalès dans le triangle OMN :
Dans le triangle OMN, on sait que : B∈[OM], A∈[ON] et (AB) // (ON) // (Oy).
De plus : OM = x ; MB = x – 3 ; AB = 2 et on cherche à calculer ON.
D'après le théorème de Thalès, on a :

$\dfrac{MA}{MN}=\dfrac{MB}{MO}=\dfrac{BA}{ON}$. Donc, avec les valeurs : $\dfrac{MA}{MN}=\dfrac{x-3}{x}=\dfrac{2}{ON}$

Je garde : $$\frac{x-3}{x}=\frac{2}{ON}$$

On obtient donc : $$ON=\frac{2x}{x-3}$$

Par conséquent : $\mathscr{A}(x) = \dfrac{OM \times ON}{2} = \dfrac{1}{2} \times x \times \dfrac{2x}{x-3}$ Donc : $\mathscr{A}(x) = \dfrac{x^2}{x-3}$; $x > 3$.

<u>***2ème méthode :***</u> Appliquer la colinéarité des vecteurs :
N $\in$ (O*y*), donc les coordonnées du point N sont (0; *y*). Pour exprimer *y* en fonction de *x*, on cherche d'abord les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$:

On a : $\overrightarrow{AM}(x-3; 0-2)$ Donc $\overrightarrow{AM}(x-3; -2)$

De même : $\overrightarrow{AN}(0-3; y-2)$ Donc $\overrightarrow{AN}(-3; y-2)$

Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires donc : $(x-3)(y-2) - (-3)(-2) = 0$,
donc $y(x-3) - 2x + 6 - 6 = 0$, donc $y(x-3) = 2x$.

Or, on sait que $x > 3$, donc $x \neq 3$, donc $y = ON = \dfrac{2x}{x-3}$ et par suite $\mathscr{A}(x) = \dfrac{x^2}{x-3}$

<u>***3ème méthode :***</u> Utiliser l'alignement des trois points M, A et N. Par exemple : écrire que les coefficients directeurs des droites (AM) et (AN) sont égaux.
(laissée au lecteur)

<u>***4ème méthode :***</u> On pose M(*m* ; 0) ; *m* est un paramètre. Trouver l'équation de la droite (AM) et écrire que le point N appartient à cette droite en utilisant le terme constant = ordonnée à l'origine ;.... (laissée au lecteur)

2°) Recherche du minimum de la fonction $\mathscr{A}$ définie par $\mathscr{A}(x) = \dfrac{x^2}{x-3}$ pour $x > 3$.

La fonction $\mathscr{A}$ est définie et dérivable sur $]3 ; +\infty[$ et

$$\mathscr{A}'(x) = \frac{2x(x-3) - x^2 \times 1}{(x-3)^2} = \frac{2x^2 - 6x - x^2}{(x-3)^2} = \frac{x^2 - 6x}{(x-3)^2}$$

Donc $$\mathscr{A}'(x) = \frac{x(x-6)}{(x-3)^2}$$

Le dénominateur étant positif, le signe de $\mathscr{A}'(x)$ est celui du numérateur. D'où le tableau de variations de la fonction $\mathscr{A}$:

x	3		6		$+\infty$
$\mathscr{A}'(x)$		$-$	0	$+$	
$\mathscr{A}(x)$		$\searrow$	$\mathscr{A}(6)$	$\nearrow$	

$\mathscr{A}(6) = \dfrac{6^2}{6-3} = \dfrac{36}{3} = 12$ unités d'aires.

L'aire du triangle est minimale pour $x = 6$. Donc la position exacte du point M est :

$$\boxed{M(6 ; 0)}$$

CQFD