Chapitre 4

Dérivation

Ce que dit le programme :

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Dérivation Nombre dérivé d'une fonction en un point. **Tangente à la courbe représentative d'une fonction dérivable en un point.**	Tracer une tangente connaissant le nombre dérivé.	Le nombre dérivé est défini comme limite du taux d'accroissement $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ quand h tend vers 0. On ne donne pas de définition formelle de la limite. L'utilisation des outils logiciels facilite l'introduction du nombre dérivé.
Fonction dérivée. Dérivée des fonctions usuelles $\sqrt{x}$ $\frac{1}{x}$ et x^n (n entier naturel non nul). Dérivée d'une somme, d'un produit et d'un quotient.	Calculer la dérivée de fonctions.	On évite tout excès de technicité dans les calculs de dérivation. Si nécessaire, dans le cadre de la résolution de problèmes, le calcul de la dérivée d'une fonction est facilité par l'utilisation d'un logiciel de calcul formel. Il est intéressant de présenter le principe de démonstration de la dérivation d'un produit.
Lien entre signe de la dérivée et sens de variation. Extremum d'une fonction.	Exploiter le sens de variation pour l'obtention d'inégalités.	Il n'est pas toujours utile de recourir à la dérivation pour étudier le sens de variation d'une fonction. On traite quelques problèmes d'optimisation.

I. Nombre dérivé et tangente en un point

1.1) Taux d'accroissement

Définition 1.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $a, x \in I$, $x \neq a$. On appelle ***taux d'accroissment*** de la fonction f entre a et b, le nombre réel :

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

C'est le coefficient directeur de la droite (AM) où A($a, f(a)$) et M($x, f(x)$).

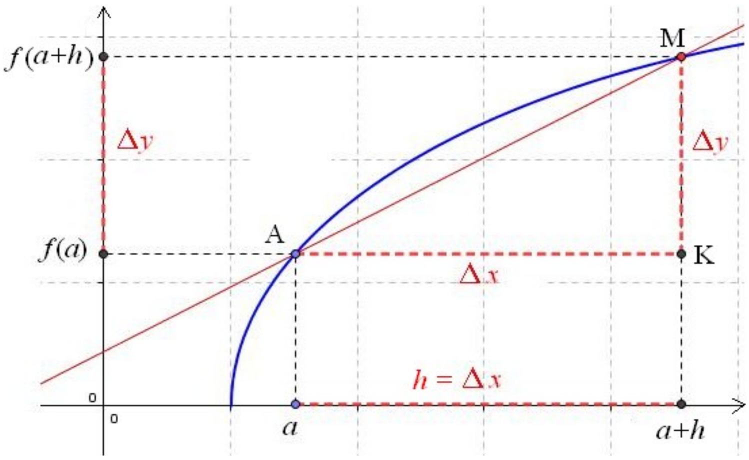
Autre méthode :

Si on pose $h=x-a$ alors $x=a+h$ et $\Delta x=h$ .On a une deuxième définition :

Définition 2.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. Soit h un nombre réel non nul tel que $a+h \in I$. On appelle ***taux d'accroissment*** de la fonction f entre a et $a+h$, le nombre réel $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

C'est le ***coefficient directeur*** de la droite (AM) où A($a, f(a)$) et M($a+h, f(a+h)$).



Exemple 1.

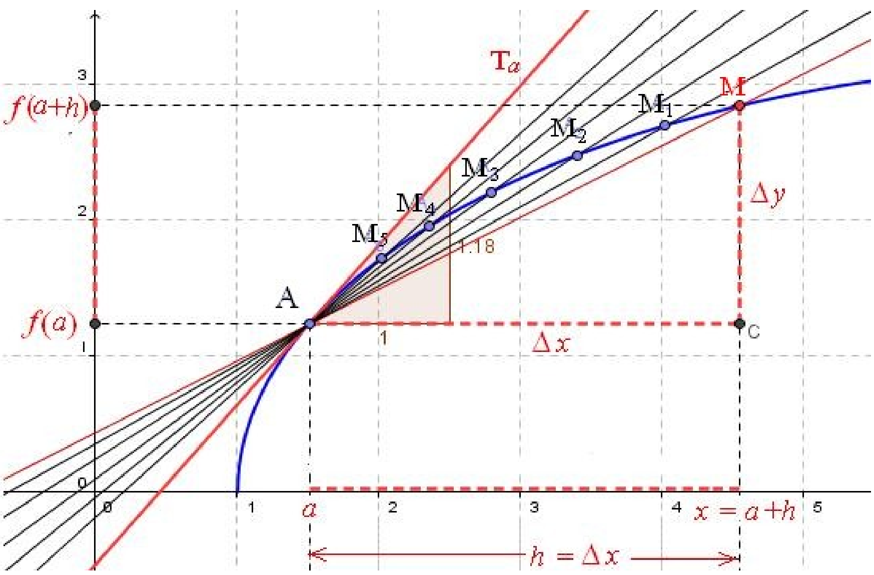
Le taux d'accroissement de la fonction $f : x \to x^2$ entre 1 et 1+*h* est donné par :

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2-1^2}{h}$$
$$= \frac{1+2\text{h}+h^2-1}{h}$$
$$= \frac{2\text{h}+h^2}{h}$$
$$= 2+h$$

1.2) Nombre dérivé en un point

Lorsque *h* prend des valeurs h_1, h_2, h_3,... « de plus en plus proches » de 0, le point M prend successivement les positions M_1, M_2, M_3,....et *a*+*h* prend des valeurs « de plus en plus proches » de *a ;* les droites (AM_1), (AM_2), (AM_3),.... tendent vers une position limite : ***la droite tanagente à la courbe au point d'abscisse a***.

Le coefficient directeur de cette droite s'appelle ***le nombre dérivé*** de la fonction au point d'abscisse *a* et se note ***f ' (a)***.



Définition 3.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $a \in I$ .On dit que la fonction ***f* est dérivable en *a*** si le taux d'accroissement de f entre a et $a+h$ tend vers un ***nombre réel fini***, noté ***f* '(a)**, lorsque h tend vers 0 et on écrit :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad .$$

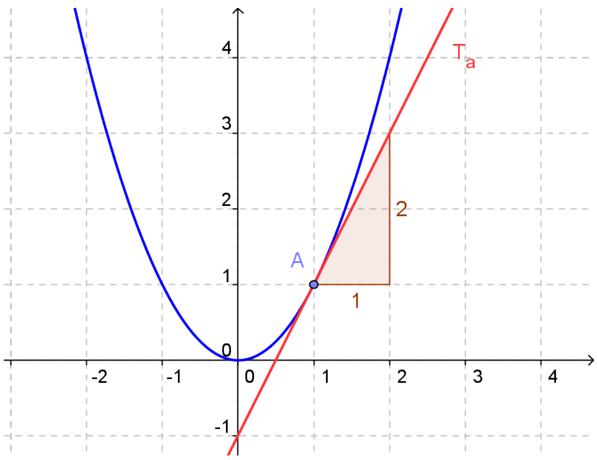
Le nombre f '(a) *– lorsqu'il existe –* ***désigne le coefficient directeur de la droite tangente à la courbe au point d'abscisse a***.

Exemple 2.

Pour la fonction $f : x \to x^2$ vue ci-dessus, nous avons :

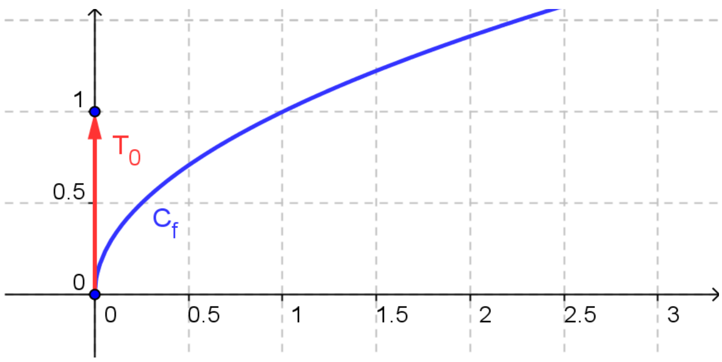
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} (2+h) = 2 \in \mathbb{R}$$

Donc **la fonction $f : x \to x^2$ est dérivable en 1 et *f '* (1) = 2.**



Exemple 3.

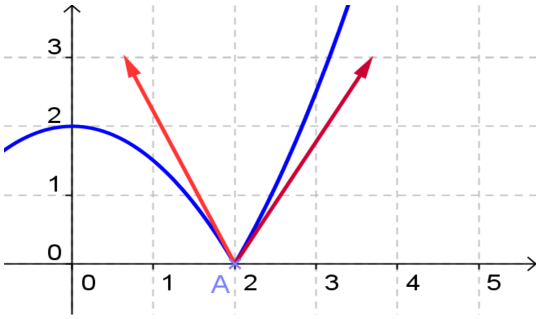
La courbe suivante représente la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$



La tangente T_0 à la courbe au point d'abscisse 0 est une droite parallèle à l'axe des ordonnées (verticale). Elle n'a pas de coefficient directeur ! On peut en déduire que **la fonction $f : x \to \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0**. (*La pente d'une droite verticale est infinie ; une droite parallèle à Oy n'a pas de coefficient directeur !*).

Exemple 4.

La courbe suivante représente une fonction f définie sur $\mathbb{R}$:



Au point A(2 ; 0) la courbe forme *un angle* et admet deux demi-tangentes qui n'ont pas le même coefficient directeur. On dit que **la fonction f n'est pas dérivable en 2**.

1.2) Équation de la droite tangente

Théorème 1.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. Si f est dérivable en a et a pour nombre dérivé $f'(a)$, alors :

la droite $\mathbf{T}_a$ passant par le point A($a, f(a)$) et de coefficient directeur $f'(a)$, est **tangente à la courbe $\mathbf{C}_f$** au point A. Son équation est donnée par :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Démonstration.

Soit $M(x\,;y)$ un point quelconque du plan. Alors, on a les équivalences suivantes :

$M(x\,;y) \in T_a \quad \Leftrightarrow$ Le coefficient directeur de la droite (AM) est $m = f'(a)$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(a)$ (*méthode infaillible pour retrouver l'équation*)

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{y-f(a)}{x-a} = f'(a)$ puis j'écris l'égalité des produits en croix

$\Leftrightarrow \quad y - f(a) = f'(a)(x-a)$ et je transpose $f(a)$ à droite.

$\Leftrightarrow \quad y = f'(a)(x-a) + f(a)$ CQFD.

Exemple 5.

Nous avons vu que la fonction $f : x \rightarrow x^2$ est dérivable en 1 et $f'(1) = 2$.

Soit A($1, f(1)$)$\in \mathrm{C}_f$. On a donc $f(1) = 1$ et $f'(1) = 2$.

L'équation de la droite tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 1 est donnée par :

$y = f'(1)(x-1) + f(1)$ donc $y = 2(x-1)+1$ donc $y = 2x-2+1$.

Conclusion : L'équation de la droite T_0 tangente à la courbe au point d'abscisse 1 est : $y=2x-1$. CQFD

II. Fonctions dérivées

2.1) Fonction dérivée

Nous venons de définir le nombre dérivé d'une fonction en un point, nous allons maintenant étendre cette notion à tous les points d'un intervalle.

Définition 4.

1°) Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que ***f est dérivable sur l'intervalle I*** si et seulement si elle est dérivable en tout nombre $x \in I$.

2°) Si f est dérivable sur l'intervalle I, alors on définit une nouvelle fonction sur I, notée f' qui à tout nombre $x \in I$ fait associer le nombre dérivé $f'(x)$

La fonction f' s'appelle ***la fonction dérivée de f*** sur l'intervalle I.

Remarque.

Une fonction f définie sur un domaine D_f, n'est pas nécessairement dérivable en tout point de D_f. On peut dire donc que le domaine de définition $D_{f'}$ de f', qui est contenu dans D_f n'est pas nécessairement égal à D_f.

Nous avons vu ci-dessus que la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0. Donc $0 \in D_f$ mais $0 \notin D_{f'}$

2.2) Dérivées des fonctions usuelles

Théorème 2. Dérivées des fonctions simples :

Soit f une fonction définie sur I, un intervalle de $\mathbb{R}$ et f' sa fonction dérivée.

1°) Fonction constante sur I : pour tout $x \in I$: $f(x) = k$, alors $f'(x) = 0$.

2°) Fonction identité sur I : pour tout $x \in I$: $f(x) = x$, alors $f'(x) = 1$.

3°) Fonction carrée: pour tout $x \in I$: $f(x) = x^2$, alors $f'(x) = 2x$.

4°) Fonction cube: pour tout $x \in I$: $f(x) = x^3$, alors $f'(x) = 3x^2$.

5°) Fonction monôme de degré n : pour tout $x \in I$: $f(x) = x^n$, alors $f'(x) = n\,x^{n-1}$.

6°) Fonction racine carrée : pour tout $x \in [0\,;+\infty[$: $f(x)=\sqrt{x}$, alors

la fonction f' est définie pour tout $x \in]0\,;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. (pas en 0).

7°) Fonction inverse : pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$: $f(x)=\dfrac{1}{x}$ alors $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$

Remarque : Nous avons déjà vu que la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0

Démonstrations : (Cette partie peut être sautée ; passer directement au théorème 3).

1°) Fonction constante sur I : pour tout $x \in I$: $f(x) = k$, pour tout $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ on a :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{k-k}{h} = 0 \quad .$$

Donc $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} 0 = 0 \in \mathbb{R}$

Conclusion 1 : Toute fonction constante sur I, est dérivable en tout nombre x de I et $f'(x) = 0$.

2°) Fonction identité sur I : pour tout : $x \in I$ $f(x) = x$, pour tout $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ on a :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{x+h-x}{h} = \frac{h}{h} = 1 \quad .$$

Donc $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} 1 = 1 \in \mathbb{R}$

Conclusion 2 : La fonction identité définie sur I, est dérivable en tout nombre x de I et $f'(x) = 1$.

3°) Fonction carrée: pour tout : $x \in I$ $f(x) = x^2$, pour tout $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ on a :

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^2-x^2}{h} \\ &= \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} \\ &= \frac{2xh+h^2}{h} = 2x+h \\ &= 2x+h\end{aligned}$$

Donc : $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} (2x+h) = 2x \in \mathbb{R}$

Conclusion 3 : La fonction carrée définie sur I, est dérivable en tout nombre x de I et $f'(x) = 2x$.

4°) Fonction cube: pour tout : $x \in I$ $f(x) = x^3$, pour tout $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ on a :

Tout d'abord, on calcule une nouvelle I.R. : $(x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$.

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^3-x^3}{h} \\ &= \frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h}\end{aligned}$$

$$= \frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h} = 3x^2+3xh+h^2$$

Donc : $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} 3x^2+3xh+h^2 = 3x^2 \in \mathbb{R}$.

Conclusion 4 : La fonction cube définie sur I, est dérivable en tout nombre x de I et $f'(x) = 3x^2$.

5°) Fonction monôme de degré n : (admise)

La fonction « puissance d'exposant n » pour tout : $x \in \mathbb{R}$ $\boldsymbol{f(x) = x^n}$, est dérivable sur $\mathbb{R}$ alors $\boldsymbol{f'(x) = n\,x^{n-1}}$.

6°) Fonction racine carrée : pour tout $x \in [0\,;+\infty[$: $f(x) = \sqrt{x}$,

On rappelle l'I.R.n°3 : $(a–b)(a+b) = a^2–b^2$. Donc en particulier, pour tous nombres réels a et b positifs ou nuls : $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}) = a-b$

Chacun de ces deux facteurs s'appelle la ***quantité conjuguée*** de l'autre. Par suite :

Pour tout $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ on a :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$$

$$= \frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

$$= \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$ après simplification.

Pour prendre la limite lorsque h tend vers 0, on distingue deux cas :

- **1er cas : si $x = 0$**. La limite lorsque h tend vers 0, de cette dernière quantité, donne un résultat de la forme $\frac{1}{0}$, donc ce n'est pas un nombre réel « fini » .
  Par conséquent la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.
- **2ème cas : si $x \neq 0$**. La limite lorsque h tend vers 0 est un nombre réel fini :
  $$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \in \mathbb{R}$$

Conclusion 6 : La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0. Mais elle est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ donc la fonction f' est définie pour tout $x \in]0\,;+\infty[$ par :

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. (pas en 0).

7°) Fonction inverse : pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$: $f(x)=\frac{1}{x}$, Pour tout $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ on a :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}$$

$$=\frac{\frac{x}{x(x+h)}-\frac{x+h}{x(x+h)}}{h}$$

$$=\frac{\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h}=\frac{\frac{-h}{x(x+h)}}{h}$$

$$=\frac{1}{h}\times\frac{-h}{x(x+h)}=\frac{-1}{x(x+h)}$$

Donc $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h \to 0} \frac{-1}{x(x+h)}=\frac{-1}{x^2} \in \mathbb{R}$

Conclusion 7 : La fonction inverse est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et la fonction dérivée f' est définie pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$

2.3) Dérivées de certaines fonctions composées

Théorème 3. Dérivées des fonctions composées :

Soient u et v deux fonction définies et dérivables sur un même intervalle I de $\mathbb{R}$, k un nombre réel et n un nombre entier. Alors :
8°) La fonction $u+v$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$: $(u+v)'(x) = u'(x) + v'(x)$.

9°) La fonction $k\,u$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$: $(k\,u)'(x) = k\,u'(x)$.

Remarque :
Ce théorème que nous allons utiliser pour calculer les premières dérivées, peut s'énoncer en langage courant comme suit :

8°) La dérivée de la somme de deux fonctions est égale à la somme des dérivées.
9°) Si on multiplie une fonction par un nombre réel k, alors la fonction dérivée est aussi multipliée par le même nombre k.

La démonstration de ce théorème se fera dans le chapitre suivant.

III. Exemples de calcul des dérivées

Donner le domaine de définition puis le domaine de dérivation puis calculer les dérivées des fonctions suivantes : (On pourra vérifier les calculs à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel dynamique).

$f(x) = 2x^2 - 7x + 12$; $g(x) = 2x^3 - 5x^2 + 2x - 10$; $h(x)=x^2+\frac{1}{x}$ et $k(x)=4\sqrt{x}-\frac{5}{x}$

Il suffit de « combiner » les « formules » de dérivation des théorèmes 2 et 3.

1°) Les fonctions f et g sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$f'(x) = 2\times(x^2)' - 7\times(x)' + (12)' = 2\times 2x - 7 + 0 = 4x - 7$.

$g'(x) = 2\times(x^3)' - 5\times(x^2)' + 2\times(x)' - (10)' = 2\times 3x^2 - 5\times 2x + 2\times 1 - 0 = 6x^2 - 10x + 2$

2°) La fonction h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ et

$h'(x) = 2x + \left(-\frac{1}{x^2}\right)$ donc $h'(x) = 2x - \frac{1}{x^2}$.

3°) La fonction k est définie sur $[\,0;+\infty\,[$ et dérivable sur $]0;+\infty\,[$ (pas en 0) et

$k'(x) = 4\times\frac{1}{2\sqrt{x}} - 5\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ donc $k'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{5}{x^2}$.